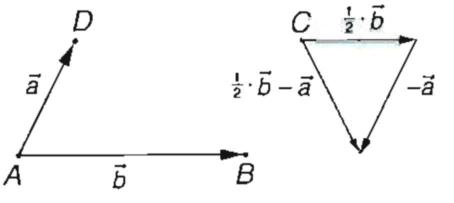
Lösung zu Aufgabe 5

Vektoren

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

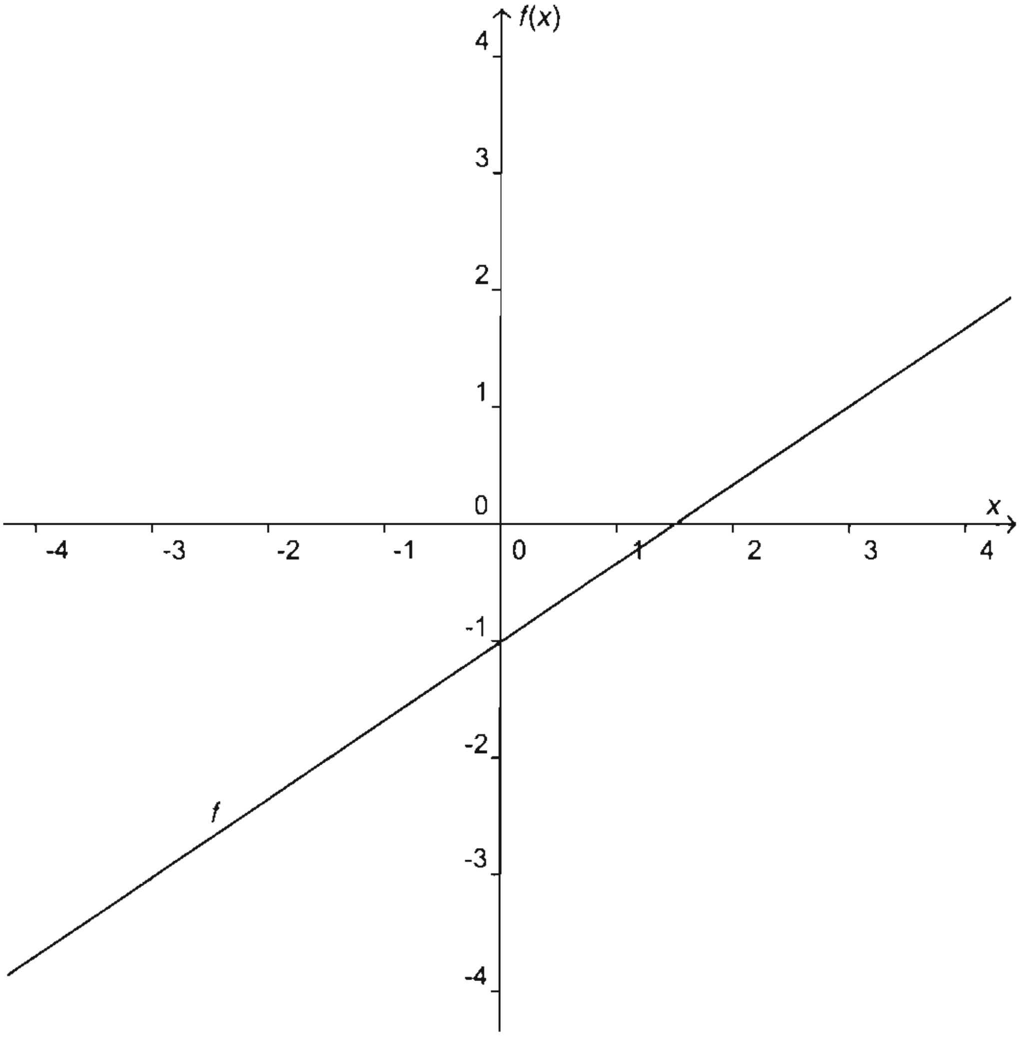
Die Lösung gilt dann als richtig, wenn der Ergebnispfeil richtig eingezeichnet ist.

Lösung zu Aufgabe 6

Parameter einer linearen Funktion

Lösungserwartung:

Eine mögliche Lösung:



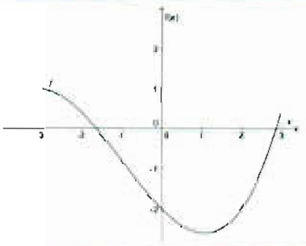
Lösungsschlüssel:

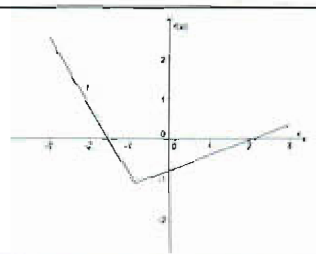
Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn ein Graph gezeichnet worden ist, der Bedingungen für die Parameter k und d erfüllt. D. h., richtig sind alle Graphen, deren Steigung $k = \frac{2}{3}$ und deren $d < 0$ ist.

Lösung zu Aufgabe 7

Reelle Funktion

Lösungserwartung:

	☒

	☒

Lösungsschlüssel:

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn beide zutreffenden Graphen angekreuzt sind.

Lösung zu Aufgabe 8

Potenzen

Lösungserwartung:

$\frac{b^{15}}{a^{12} \cdot c^{3}}$	☒
$\left(\frac{a^{4} \cdot c}{b^{5}}\right)^{-3}$	☒
$a^{-12} \cdot b^{15} \cdot c^{-3}$	☒

Lösungsschlüssel:

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn alle drei zutreffenden Antworten angekreuzt sind.

Lösung zu Aufgabe 9

Potenzfunktion

Lösungserwartung:

$a = -0{,}2$
$b = 5$

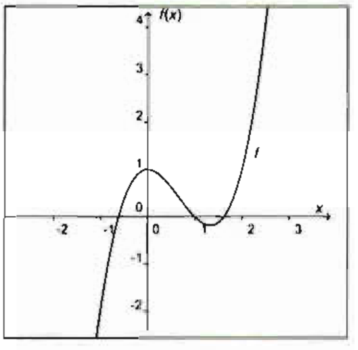
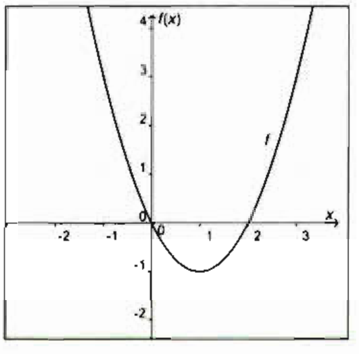
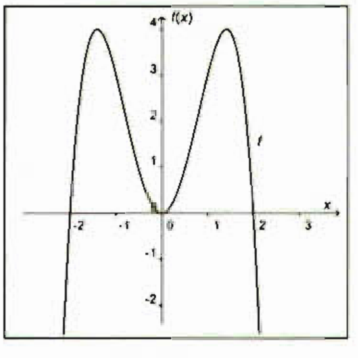
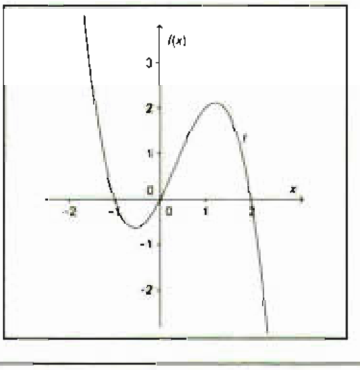
Lösungsschlüssel:

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn beide Parameter richtig angegeben sind.

Lösung zu Aufgabe 10

Polynomfunktion

Lösungserwartung:

	F
	A
	D
	B

A	$f(x) = x^2 - 2x$
B	$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$
D	$f(x) = -x^4 + 4x^2$
F	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

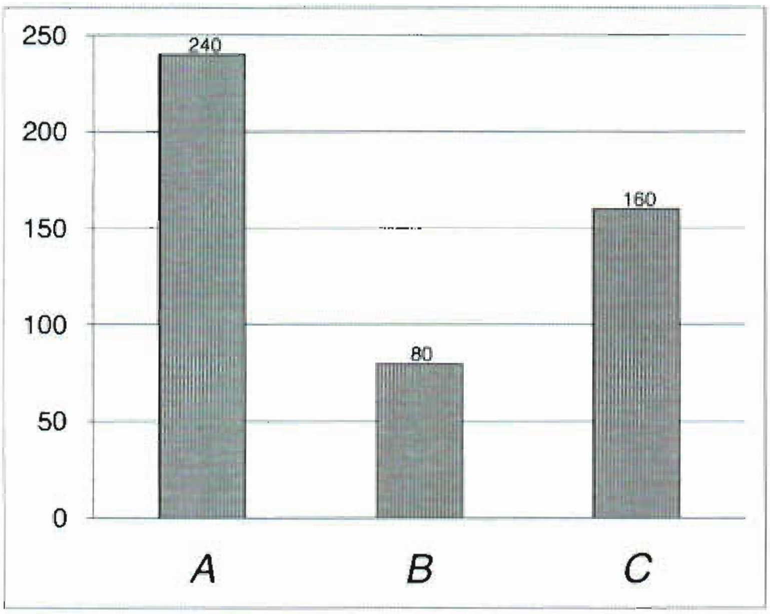
Lösungsschlüssel:

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn alle vier Zuordnungen richtig gesetzt worden sind.

Lösung zu Aufgabe 11

Säulendiagramm

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn alle drei Säulen die richtige Höhe aufweisen.

Lösung zu Aufgabe 12

Mittelwert einfacher Datensätze

Lösungserwartung:

$\overline{m} = \frac{2 \cdot 119 + 113 + 120}{4}$	☒
$\overline{m} = \frac{1}{12} \cdot (113 + 2 \cdot 119 + 120) \cdot 3$	☒

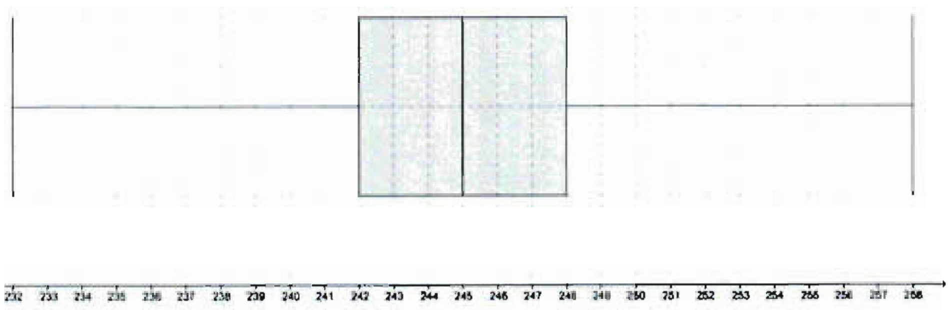
Lösungsschlüssel:

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn beide zutreffenden Berechnungsmöglichkeiten angekreuzt sind.

Lösung zu Aufgabe 13

Brotverbrauch

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn alle fünf charakteristischen Werte (Minimum, Q1, Median, Q3, Maximum) richtig eingezeichnet sind.

Lösung zu Aufgabe 14

Datenreihe

Lösungserwartung:

Die Standardabweichung der neuen Datenreihe $x_1, \ldots, x_{12}$ ist kleiner als die Standardabweichung der ursprünglichen Datenreihe $x_1, \ldots, x_{10}$.	☒
Der arithmetische Mittelwert der neuen Datenreihe $x_1, \ldots, x_{12}$ stimmt mit dem arithmetischen Mittelwert der ursprünglichen Datenreihe $x_1, \ldots, x_{10}$ überein.	☒

Lösungsschlüssel:

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn beide zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Lösung zu Aufgabe 15

Arithmetisches Mittel einer Datenreihe

Lösungserwartung:

$\bar{y} = 123$
$s_y = 12$

Lösungsschlüssel:

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn beide Werte richtig angegeben sind.

8.3 Ausgewählte Unterrichtsaufgaben

Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Ableitung von Sinus- und Cosinus-Funktion

Aufgabennummer: 1_010	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 2.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind vier Funktionen und sechs Ableitungsfunktionen.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Funktionen die richtige Ableitungsfunktion f' zu!

$f(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	
$f(x) = \cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	
$f(x) = -2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	
$f(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	

A	$f'(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$
B	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)$
C	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$
D	$f'(x) = -\cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
E	$f'(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
F	$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + \cos(x)$

Möglicher Lösungsweg

$f(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	D
$f(x) = \cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	C
$f(x) = -2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	A
$f(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	B

A	$f'(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$
B	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)$
C	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$
D	$f'(x) = -\cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
E	$f'(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
F	$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + \cos(x)$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die vier Zuordnungen richtig erfolgt sind.

Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Ableitungsfunktion einer linearen Funktion

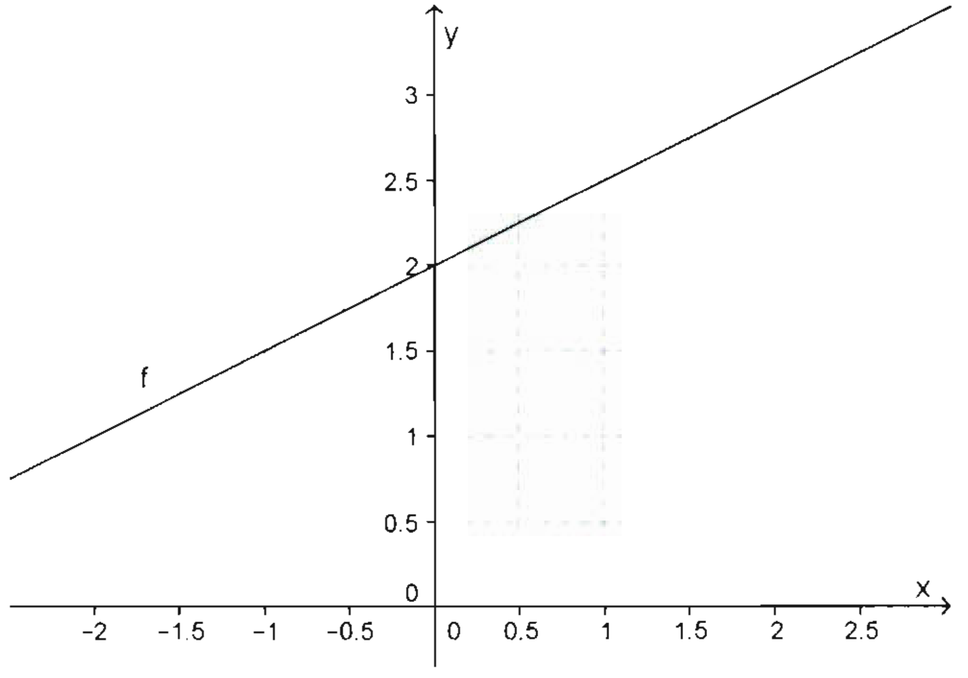
Aufgabennummer: 1_009	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

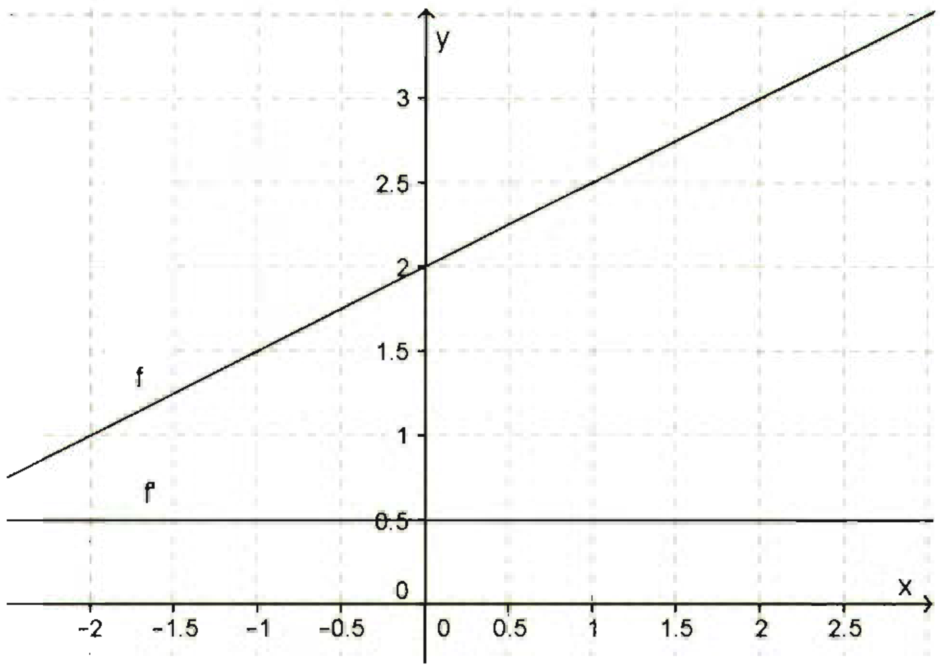
In der Abbildung ist der Graph einer linearen Funktion f dargestellt.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie die Ableitungsfunktion f' der Funktion f ein!



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der Graph von f' deutlich erkennbar eine konstante Funktion mit der Funktionsgleichung $f'(x) = 0,5$ ist. Die Funktionsgleichung der 1. Ableitung muss nicht angegeben werden.

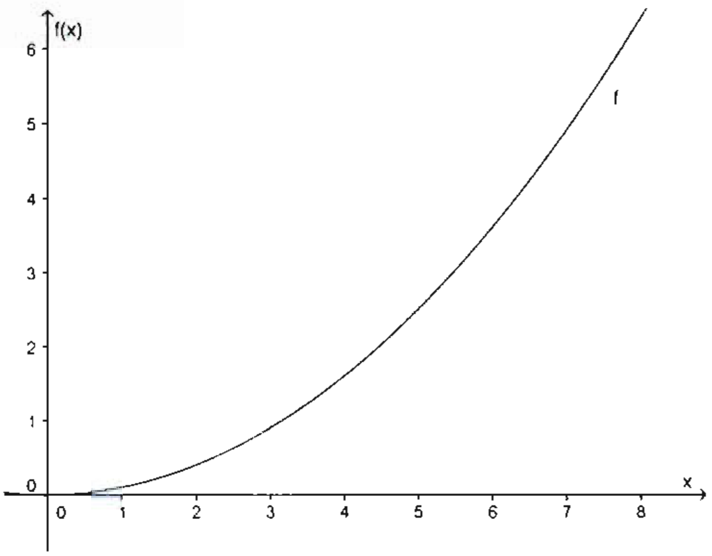
Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Änderungsmaße

Aufgabennummer: 1_004	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 0{,}1x^2$.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für die gegebene Funktion f zutreffend sind!

Die absolute Änderung in den Intervallen [0; 3] und [4; 5] ist gleich groß.	☐
Die mittlere Änderungsrate der Funktion f in den Intervallen [0; 2] und [2; 4] ist gleich.	☐
Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 5$ hat den Wert 2,5.	☐
Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 2$ ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 6$.	☐
Die Steigung der Sekante durch die Punkte A $(3\|f(3))$ und B $(6\|f(6))$ ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 3$.	☐

Möglicher Lösungsweg

Die absolute Änderung in den Intervallen [0; 3] und [4; 5] ist gleich groß.	☒
Die mittlere Änderungsrate der Funktion f in den Intervallen [0; 2] und [2; 4] ist gleich.	
Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 5$ hat den Wert 2,5.	
Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 2$ ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 6$.	
Die Steigung der Sekante durch die Punkte A $(3 \mid f(3))$ und B $(6 \mid f(6))$ ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 3$.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt wurden.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Charakteristische Eigenschaften einer linearen Funktion

Aufgabennummer: 1_018	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit $f(x) = 3x + 2$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Eigenschaften an, die auf die Funktion f zutreffen!

$f(x + 1) = f(x) + 3$	☐
$f(x + 1) = f(x) + 2$	☐
$f(x + 1) = 3 \cdot f(x)$	☐
$f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$	☐
$f(x_2) - f(x_1) = f'(x) \cdot (x_2 - x_1)$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \neq x_2$	☐

Möglicher Lösungsweg

$f(x + 1) = f(x) + 3$	☒
$f(x + 1) = f(x) + 2$	
$f(x + 1) = 3 \cdot f(x)$	
$f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$	
$f(x_2) - f(x_1) = f'(x) \cdot (x_2 - x_1)$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \neq x_2$	☒

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt wurden.

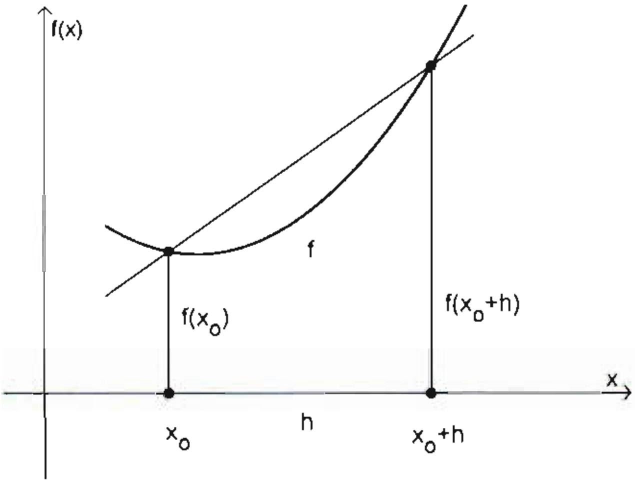
Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Differenzenquotient

Aufgabennummer: 1_003	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion *f* mit einer Sekante.



Aufgabenstellung:

Die beiden Textfelder sind so zu ergänzen, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht. Kreuzen Sie dazu in der ersten und der zweiten Spalte jeweils den passenden Ausdruck an!

Der Ausdruck ______ (1) ______ beschreibt die ______ (2) ______.

(1)	
$\frac{f(x) - f(x_0)}{h}$	☐
$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	☐
$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0}$	☐

(2)	
die Steigung von *f* an der Stelle *x*.	☐
die 1. Ableitung der Funktion *f*.	☐
die mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_0 + h]$	☐

Möglicher Lösungsweg

Der Ausdruck ______ (1) ______ beschreibt die ______ (2) ______.

(1)	
$\frac{f(x)-f(x_0)}{h}$	
$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	☒
$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0}$	

(2)	
die Steigung von f an der Stelle x.	
die 1. Ableitung der Funktion f.	
die mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_0+h]$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt wurden.

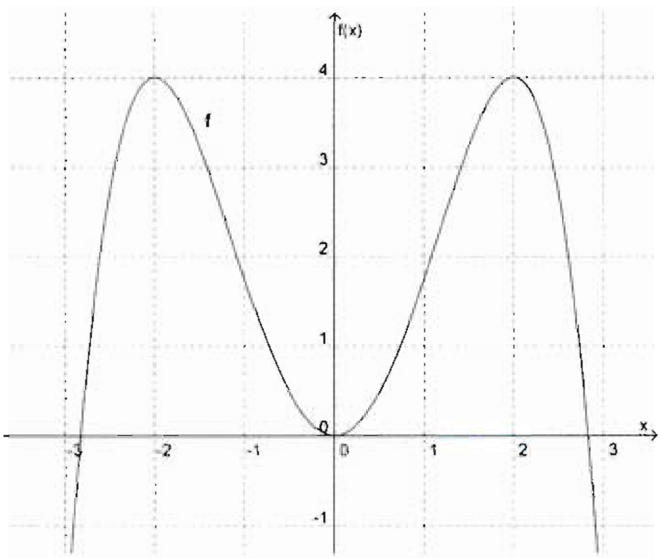
Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Eigenschaften von Funktionen

Aufgabennummer: 1_012	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion *f*, die vom Grad 4 ist.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für die Funktion *f* zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion besitzt drei Wendepunkte.	☐
Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der *y*-Achse.	☐
Die Funktion ist streng monoton steigend für $x \in [0; 4]$	☐
Die Funktion besitzt einen Wendepunkt, der gleichzeitig auch Tiefpunkt ist.	☐
Die Funktion besitzt zwar einen lokalen Tiefpunkt, aber keine globalen Tiefpunkte.	☐

Möglicher Lösungsweg

Die Funktion besitzt drei Wendepunkte.	☐
Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.	☒
Die Funktion ist streng monoton steigend für $x \in [0; 4]$	☐
Die Funktion besitzt einen Wendepunkt, der gleichzeitig auch Tiefpunkt ist.	☐
Die Funktion besitzt zwar einen lokalen Tiefpunkt, aber keine globalen Tiefpunkte.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt wurden.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Exponentialfunktion

Aufgabennummer: 1_021	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an.

Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$ des Graphen hat den Wert 0.	☐
Wird das Argument x um 1 erhöht, dann steigen die Funktionswerte auf das e-fache.	☐
Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 1$ des Graphen hat den Wert e.	☐
Wird das Argument x um 1 vermindert, dann sinken die Funktionswerte auf das $\frac{1}{e}$-fache.	☐
Der Graph von f hat an jeder Stelle eine positive Krümmung.	☐

Möglicher Lösungsweg

Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$ des Graphen hat den Wert 0.	
Wird das Argument x um 1 erhöht, dann steigen die Funktionswerte auf das e-fache.	☒
Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 1$ des Graphen hat den Wert e.	☒
Wird das Argument x um 1 vermindert, dann sinken die Funktionswerte auf das $\frac{1}{e}$-fache.	☒
Der Graph von f hat an jeder Stelle eine positive Krümmung.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die vier zutreffenden Aussagen angekreuzt wurden.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Exponentielle Abnahme

Aufgabennummer: 1_020	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die angegebenen Funktionsgleichungen beschreiben exponentielle Zusammenhänge.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Funktionsgleichungen an, die eine exponentielle Abnahme beschreiben!

$f(x) = 100 \cdot 1{,}2^{x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot e^{0{,}2x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^{x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^{-x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}2x}$	☐

Möglicher Lösungsweg

$f(x) = 100 \cdot 1{,}2^x$	
$f(x) = 100 \cdot e^{0{,}2x}$	
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^x$	☒
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^{-x}$	
$f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}2x}$	☒

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt wurden.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

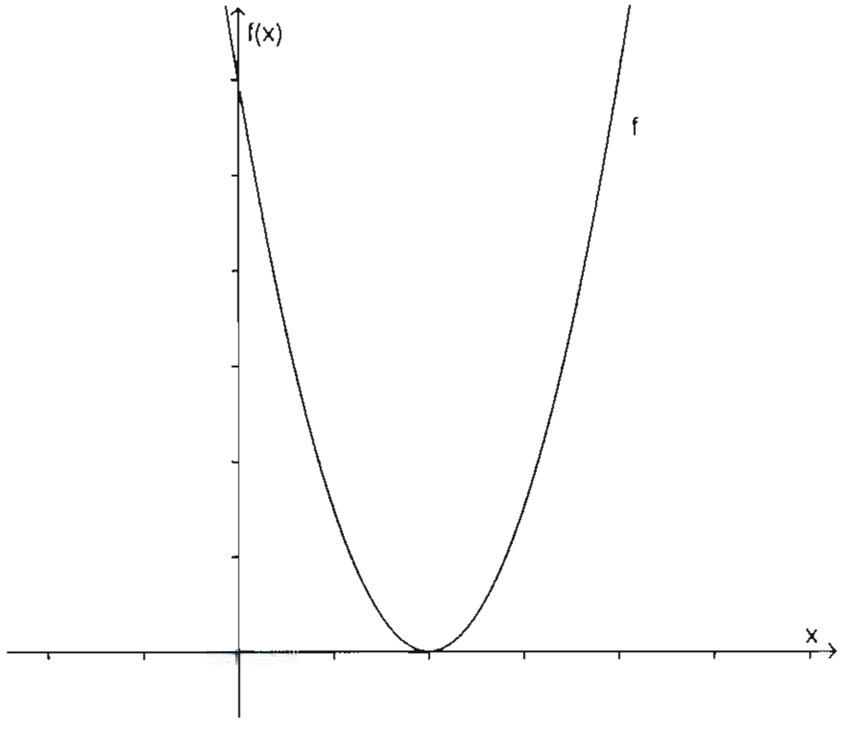
Funktion und Stammfunktion

Aufgabennummer: 1_008	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.2	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

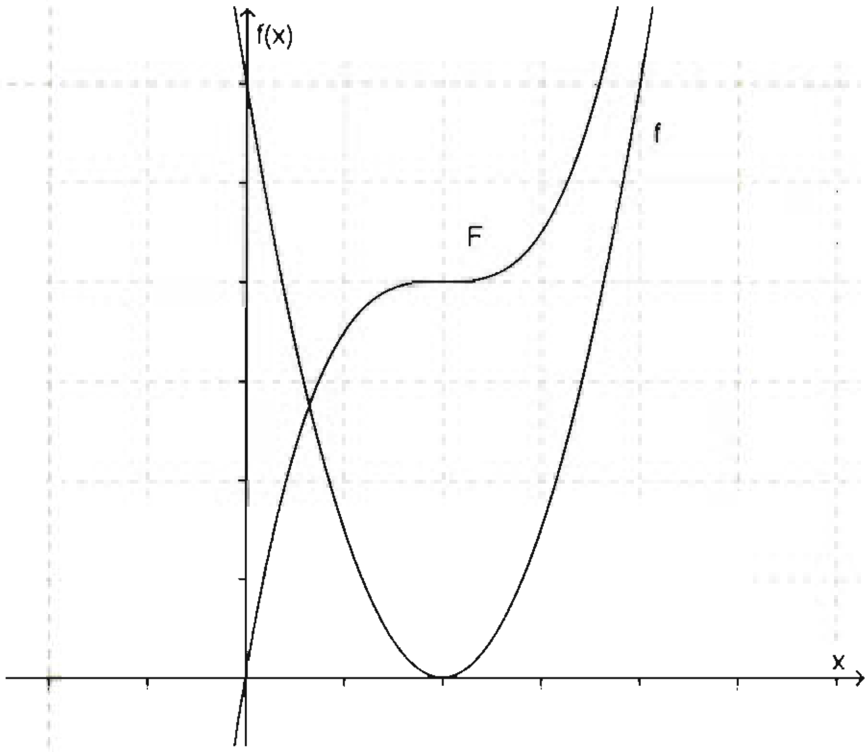
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Graphen einer Stammfunktion F der Funktion f in die Abbildung ein!



Möglicher Lösungsweg



Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der Graph der Funktion *F* im gesamten dargestellten Bereich monoton wachsend dargestellt wird und an der Stelle 2 einen deutlich erkennbaren Sattelpunkt aufweist.

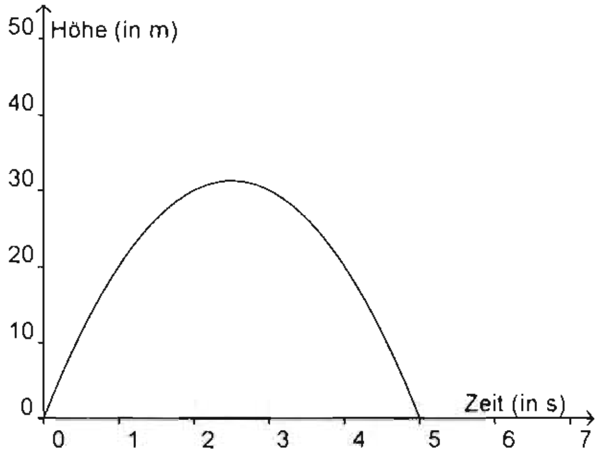
Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Funktionale Abhängigkeit

Aufgabennummer: 1_022	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die in der Abbildung dargestellte Polynomfunktion 2. Grades beschreibt die Höhe (in m) eines senkrecht nach oben geworfenen Körpers in Abhängigkeit von der Zeit (in s).



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an.

Der Körper befindet sich nach einer Sekunde und nach vier Sekunden in 20 m Höhe.	☐
Nach fünf Sekunden ist der Körper in derselben Höhe wie zu Beginn der Bewegung.	☐
Der Körper erreicht maximal 30 m Höhe.	☐
Der Körper befindet sich nach 4,8 Sekunden in einer Höhe von 10 m.	☐
Der Körper befindet sich nach ca. 2,5 Sekunden in der maximalen Höhe.	☐

Möglicher Lösungsweg

Der Körper befindet sich nach einer Sekunde und nach vier Sekunden in 20 m Höhe.	☒
Nach fünf Sekunden ist der Körper in derselben Höhe wie zu Beginn der Bewegung.	☒
Der Körper erreicht maximal 30 m Höhe.	
Der Körper befindet sich nach 4,8 Sekunden in einer Höhe von 10 m.	
Der Körper befindet sich nach ca. 2,5 Sekunden in der maximalen Höhe.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt wurden.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Wachstum

Aufgabennummer: 1_005	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Wachstum tritt in der Natur fast nie unbegrenzt auf, es erreicht einmal eine gewisse Grenze (Sättigung). Diese Sättigungsgrenze sei K. Der vorhandene Bestand zum Zeitpunkt n sei x_n.

Zur Beschreibung vieler Vorgänge (Wachstum von Populationen, Ausbreitung von Krankheiten oder Informationen, Erwärmung etc.) verwendet man folgendes mathematische Modell:

$x_{n+1} - x_n = r \cdot (K - x_n)$ mit $r \in \mathbb{R}^+$, $0 < r < 1$ (r ist ein Proportionalitätsfaktor)

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die auf dieses Modell zutreffende(n) Aussage(n) an!

Diese Gleichung kann als eine lineare Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ gedeutet werden.	☐
Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum momentanen Bestand.	☐
Es liegt ein kontinuierliches Wachstumsmodell vor, d. h., man kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt die Größe des Bestands errechnen.	☐
Der Zuwachs bei diesem Wachstum ist proportional zur noch verfügbaren Restkapazität (= Freiraum).	☐
Mit zunehmender Zeit wird der Zuwachs immer geringer.	☐

Möglicher Lösungsweg

Diese Gleichung kann als eine lineare Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ gedeutet werden.	☒
Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum momentanen Bestand.	
Es liegt ein kontinuierliches Wachstumsmodell vor, d. h., man kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt die Größe des Bestands errechnen.	
Der Zuwachs bei diesem Wachstum ist proportional zur noch verfügbaren Restkapazität (= Freiraum).	☒
Mit zunehmender Zeit wird der Zuwachs immer geringer.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die drei zutreffenden Aussagen angekreuzt wurden.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Wahl

Aufgabennummer: 1_015	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 4.1	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Bei einer Befragung von 2 000 zufällig ausgewählten wahlberechtigten Personen geben 14 % an, dass sie bei der nächsten Wahl für die Partei „Alternatives Leben" stimmen werden. Aufgrund dieses Ergebnisses gibt ein Meinungsforschungsinstitut an, dass die Partei mit 12 % bis 16 % der Stimmen rechnen kann.

Aufgabenstellung:

Mit welcher Sicherheit kann man diese Behauptung aufstellen?

Möglicher Lösungsweg

Konfidenzintervall: [0,12; 0,16]

$\mu = n \cdot p = 2\,000 \cdot 0{,}14 = 280$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 15{,}5$

$0{,}16 \cdot 2\,000 = 320$

$320 = 280 + z \cdot 15{,}5 \rightarrow z = 2{,}58 \rightarrow \Theta(z) = 0{,}995$

$2 \cdot \Theta(z) - 1 = 0{,}99$

Die Behauptung kann mit 99%iger Sicherheit aufgestellt werden.

Lösungsschlüssel

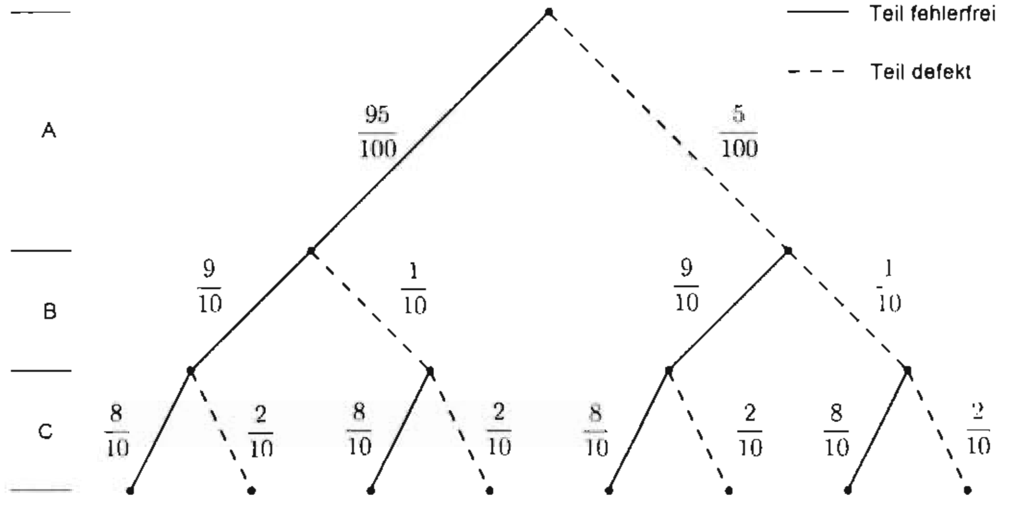
Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der korrekte Prozentwert angegeben wurde.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Wahrscheinlichkeit eines Defekts

Aufgabennummer: 1_014	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Maschine besteht aus den drei Bauteilen A, B und C. Diese haben die im nachstehenden Modell eingetragenen, voneinander unabhängigen Defekthäufigkeiten. Eine Maschine ist defekt, wenn mindestens ein Bauteil defekt ist.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer defekten Maschine zwei oder mehr Bauteile defekt sind!

$P(x \geq 2) =$ ______________________

Möglicher Lösungsweg

$$P(x \geq 2) = \frac{95}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{33}{100} = 0{,}033$$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn der Wert der Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben wurde.

Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Aufnahmetest

Aufgabennummer: 2_002	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒	
Grundkompetenzen: WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3		
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Universität führt für die angemeldeten Bewerber/innen einen Aufnahmetest durch. Dabei werden zehn Multiple-Choice-Fragen gestellt, wobei jede Frage vier Antwortmöglichkeiten hat. Nur eine davon ist richtig. Wer mindestens acht Fragen richtig beantwortet, wird sicher aufgenommen. Wer alle zehn Fragen richtig beantwortet, erhält zusätzlich ein Leistungsstipendium. Die Ersteller/innen dieses Tests geben die Wahrscheinlichkeit, bei zufälligem Ankreuzen aller Fragen aufgenommen zu werden, mit 0,04158 % an. Nehmen Sie an, dass Kandidat K alle Antworten völlig zufällig ankreuzt.

Aufgabenstellung:

a) Nennen Sie zwei Gründe, warum die Anzahl der richtig beantworteten Fragen unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt ist!
Geben Sie einen möglichen Grund an, warum in der Realität das Modell der Binomialverteilung hier eigentlich nicht anwendbar ist!

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Kandidat K nicht aufgenommen wird!
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K ein Leistungsstipendium erhält!

Möglicher Lösungsweg

a) Dieser Aufgabenteil ist durch sinngemäßes Angeben von mindestens zwei der vier angeführten Gründe richtig gelöst:

Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt, weil

- es nur die beiden Ausgänge „richtig beantwortet" und „falsch beantwortet" gibt
- das Experiment unabhängig mit n = 10 Mal wiederholt wird
- die Erfolgswahrscheinlichkeit dabei konstant bleibt
- es sich dabei um ein „Bernoulli-Experiment" handelt

Der zweite Aufgabenteil ist korrekt gelöst, wenn ein Grund (sinngemäß) angeführt wird, z. B.:

- Eine Bewerberin/ein Bewerber, die/der sich für ein Studium interessiert, wird sicher nicht beim Aufnahmetest zufällig ankreuzen.
- Sobald Kandidat K auch nur eine Antwortmöglichkeit einer Frage ausschließen kann, wäre die Voraussetzung für die Binomialverteilung verletzt. Genau aus diesem Grund wird die Universität mit zehn Multiple-Choice-Fragen nicht das Auslangen finden, da die Erfolgswahrscheinlichkeit für kompetenzbasiertes Antworten sicher wesentlich höher ist als 0,25.
- Die Unabhängigkeit der Wiederholung des Zufallsexperiments ist sicher dadurch verletzt, dass die einzelnen Kandidatinnen und Kandidaten aufgrund ihrer Vorbildung unterschiedliche Erfolgswahrscheinlichkeiten für die Beantwortung der einzelnen Fragen aufweisen. Somit kann unter diesen Voraussetzungen niemals von einer unabhängigen Wiederholung mit Zählen der Anzahl der Erfolge im Sinne eines Bernoulli-Experiments gesprochen werden.

Es sind auch weitere eigenständige Lösungen denkbar.

b) Für die Lösung ist keine Binomialverteilung nötig, da das gesuchte Ereignis das Gegenereignis zur „Aufnahme" darstellt. Somit beträgt die (von den Testautorinnen und Testautoren) angegebene Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Ablehnung}) = 1 - P(\text{Aufnahme}) = 1 - 0{,}0004158 = 0{,}9995842$$

Die Ablehnung des Kandidaten K ist somit praktisch sicher.

Auch hier ist keine Binomialverteilung nötig, da ein Zufallsexperiment mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von 0,25 zehnmal unabhängig wiederholt wird, wobei bei jeder Wiederholung ein „Erfolg" eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit $P(\text{Leistungsstipendium}) = 0{,}25^{10} \approx 0$.

Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Section Control

Aufgabennummer: 2_003	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: WS 1.1, WS 1.3, WS 3.1, WS 3.2, WS 3.3

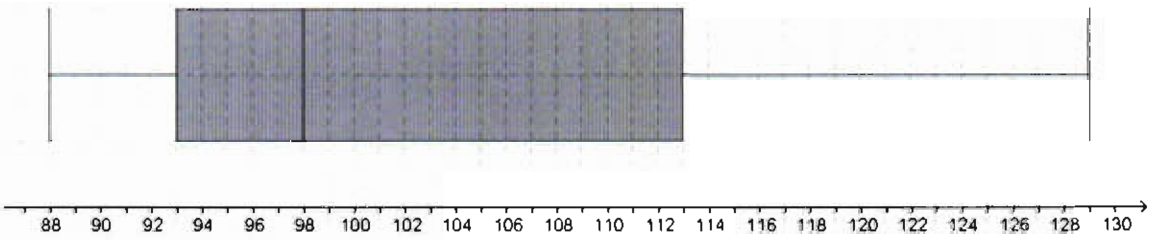
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Begriff *Section Control* (Abschnittskontrolle) bezeichnet ein System zur Überwachung von Tempolimits im Straßenverkehr, bei dem nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen wird, sondern die Durchschnittsgeschwindigkeit über eine längere Strecke. Dies geschieht mithilfe von zwei Überkopfkontrollpunkten, die mit Kameras ausgestattet sind. Das Fahrzeug wird sowohl beim ersten als auch beim zweiten Kontrollpunkt fotografiert.

Die zulässige Höchstgeschwindigkeit bei einer bestimmten Abschnittskontrolle beträgt 100 km/h. Da die Polizei eine Toleranz kleiner 3 km/h gewährt, löst die *Section Control* bei 103 km/h aus. Lenker/innen von Fahrzeugen, die dieses Limit erreichen oder überschreiten, machen sich strafbar und werden im Folgenden als „Temposünder" bezeichnet.

Eine Stichprobe der Durchschnittsgeschwindigkeiten von zehn Fahrzeugen ist in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet und im abgebildeten Boxplot dargestellt.

v in km/h	88	113	93	98	121	98	90	98	105	129



Aufgabenstellung:

a) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Durchschnittsgeschwindigkeiten in der Stichprobe!

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) zur Standardabweichung an!

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	☐
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	☐
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	☐
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	☐
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von $\bar{x}$.	☐

b) Bestimmen Sie aus dem Boxplot (Kastenschaubild) der Stichprobe den Median sowie das obere und untere Quartil! Geben Sie an, welche zwei Streumaße aus dem Boxplot ablesbar sind! Bestimmen Sie auch deren Werte!

c) Die Erfahrung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von mindestens 103 km/h zu erfassen, 14 % beträgt. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Temposünder unter fünfzig zufällig ausgewählten Fahrzeuglenkern! Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der Temposünder unter fünfzig Fahrzeuglenkern innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert, d. h. im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ liegt!

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = 103{,}3$ km/h

$s = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 13{,}6$ km/h

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	☒
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	☒
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	☒
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von $\bar{x}$.	

b) Daten aus dem Boxplot: Median … 98 km/h; unteres Quartil … 93 km/h;
oberes Quartil … 113 km/h; Spannweite … 41 km/h;
Quartilsabstand … 20 km/h

c) Lösung mittels Binomialverteilung

$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}14 = 7$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = 2{,}45$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(5 \leq X \leq 9) =$
$= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) =$
$= 0{,}1286 + 0{,}1570 + 0{,}1606 + 0{,}1406 + 0{,}1068 = 0{,}6936 = 69{,}36\ \%$

Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Wachstum einer Pflanze

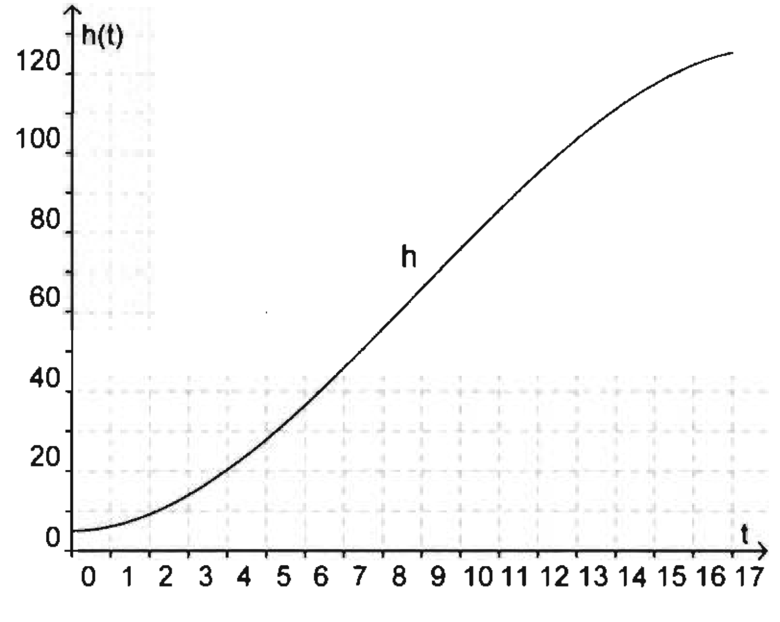
Aufgabennummer: 2_004	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.3, AN 1.3, AN 2.1, AN 3.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Manche einjährige Nutz- und Zierpflanzen wachsen in den ersten Wochen nach der Pflanzung sehr rasch. Im Folgenden wird nun eine spezielle Sorte betrachtet. Die endgültige Größe einer Pflanze der betrachteten Sorte hängt auch von ihrem Standort ab und kann im Allgemeinen zwischen 1,0 m und 3,5 m liegen. Pflanzen dieser Sorte, die im Innenbereich gezüchtet werden, erreichen Größen von 1,0 m bis 1,8 m.

In einem Experiment wurde der Wachstumsverlauf dieser Pflanze im Innenbereich über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe dokumentiert. Im Anschluss wurde die Höhe h dieser Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion h mit $h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27t^2 + 120)$ modelliert. Dabei bezeichnet t die Anzahl der Wochen seit der Pflanzung und $h(t)$ die Höhe zum Zeitpunkt t in Zentimeter. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h im Beobachtungszeitraum [0, 17].



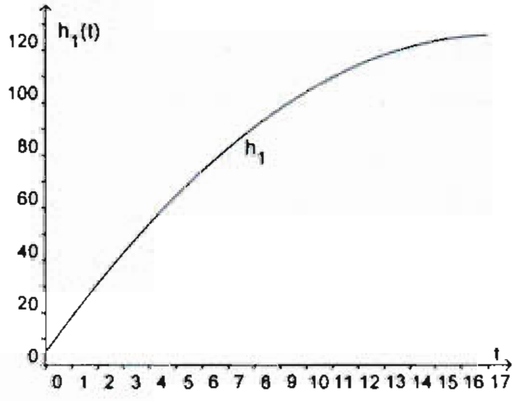
Aufgabenstellung:

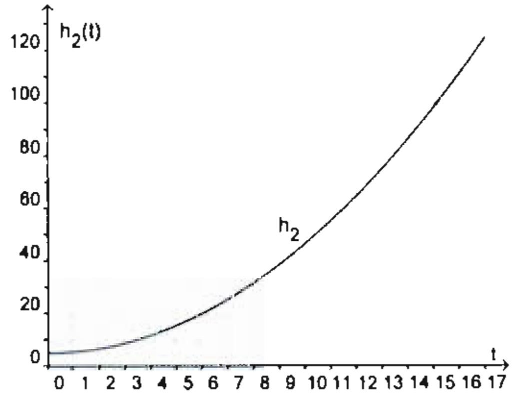
a) Berechnen Sie den Wert des Quotienten $\frac{h(13) - h(9)}{4}$ und den Wert von $h'(9)$! Geben Sie an, welche Bedeutung die beiden berechneten Ergebnisse im gegebenen Kontext haben!

b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Funktion h im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt hat! Begründen Sie Ihre Rechenschritte!

c) Für das Wachstum der beobachteten Pflanze ist auch die entsprechende Düngung von Bedeutung. Im gegebenen Fall wurde die Pflanze zwei Wochen vor dem Zeitpunkt des stärksten Wachstums gedüngt. Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt durch Rechnung! Begründen Sie Ihre Überlegungen!

d) Im selben Zeitraum wurde das Höhenwachstum von zwei weiteren Pflanzen der gleichen Sorte beobachtet und modelliert. Die Abbildungen zeigen die Graphen der entsprechenden Funktionen h_1 und h_2.





Vergleichen Sie das Krümmungsverhalten der Funktionen h, h_1 und h_2 im Intervall [0, 17] und interpretieren Sie es im Hinblick auf das Wachstum der drei Pflanzen!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{h(13) - h(9)}{4} \approx 9{,}47$

$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot \left(-3t^2 + 54t\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(-t^2 + 18t\right)$

$h'(9) \approx 10{,}13$

Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Zeitintervall [9, 13] beträgt rund 9,5 cm pro Woche. Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 9$, d. h. nach 9 Wochen, beträgt rund 10,1 cm pro Woche.

b) In einem lokalen Hochpunkt muss die Tangente an den Graphen horizontal sein, d. h., die 1. Ableitung muss den Wert 0 haben.

$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot \left(-3t^2 + 54t\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(-t^2 + 18t\right)$

$t \cdot (-t + 18) = 0$
$t_1 = 0,\ t_2 = 18$

Die Funktion hat an der Stelle $t = 0$ ein lokales Minimum und an der Stelle $t = 18$ ein lokales Maximum. Der Wert $t = 18$ liegt nicht im Beobachtungsintervall, d. h., die Funktion hat im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt.

c) $h''(t) = \frac{1}{4} \cdot \left(-t + 9\right)$

Die Kurve ist für $t < 9$ linksgekrümmt, d. h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt zu. Die Kurve ist für $t > 9$ rechtsgekrümmt, d. h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt ab. Daher ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach neun Wochen am größten. Die Pflanze wurde also am Beginn der 8. Woche gedüngt.

Ein weiterer Lösungsansatz wäre, das Maximum der Wachstumsfunktion (also von h') zu bestimmen.

d) Die Funktion h_1 ist rechtsgekrümmt, die Funktion h_2 ist linksgekrümmt, das Krümmungsverhalten der Funktion h ändert sich. Das bedeutet, die Wachstumsgeschwindigkeit jener Pflanze, die durch h_1 beschrieben wird, wird immer kleiner (sie wächst immer langsamer) und die Wachstumsgeschwindigkeit jener Pflanze, die durch h_2 beschrieben wird, wird immer größer (sie wächst immer schneller).

Im Vergleich dazu ändert sich das Monotonieverhalten der Wachstumsgeschwindigkeit bei jener Pflanze, die durch h beschrieben wird, an der Stelle $t = 9$ [vgl. c)].

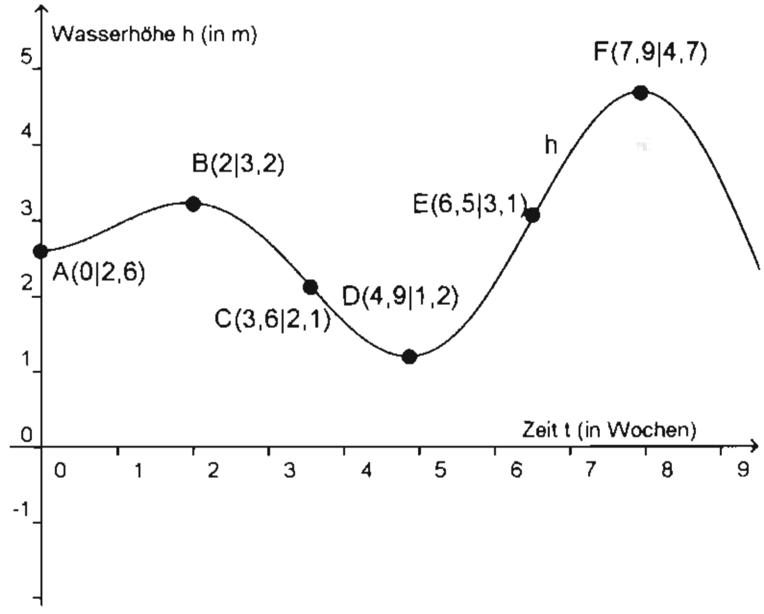
Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Wasserstand eines Bergsees

Aufgabennummer: 2_001	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3	

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Funktion h beschreibt die Wasserhöhe eines Bergsees in Abhängigkeit von der Zeit t. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h.



Aufgabenstellung:

a) Bestimmen Sie den Wert des Differenzenquotienten des Wasserstands im Intervall [0; 2] und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt! Um wie viel Prozent ist die Wasserhöhe während der ersten zwei Wochen gestiegen?

b) Was beschreibt die erste Ableitungsfunktion h' der Funktion h? Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Differentialquotienten der Wasserhöhe zum Zeitpunkt $t = 6$ und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt!

c) Was beschreibt die zweite Ableitungsfunktion h'' der Funktion h? Wann etwa nimmt die Wasserhöhe am stärksten zu?

Möglicher Lösungsweg

a)

$\frac{3{,}2 - 2{,}6}{2 - 0} = 0{,}3$ → Bis zum Ende der zweiten Woche nimmt die Wasserhöhe im Mittel pro Woche um 0,3 m zu.

$3{,}2 : 2{,}6 \approx 1{,}23$ → Der Wasserstand nahm um ca. 23 % zu.

b)
Durch die erste Ableitungsfunktion h' ist die Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe bestimmt.
$h'(6) \approx 1{,}6$ → Das bedeutet, dass nach sechs Wochen die momentane Änderungsrate 1,6 m pro Woche beträgt.

c)
Die zweite Ableitungsfunktion h'' beschreibt das Monotonieverhalten der Änderungsrate der Wasserhöhe bzw. die momentane Änderungsrate der Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe. Die Wasserhöhe nimmt nach ca. 6,5 Wochen am stärksten zu.

9 Angewandte Mathematik (BHS)

9.1 Beurteilungsraster

Bundesinstitut bifie

Beurteilungsraster zur schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik (BHS)

Beurteilung / Kompetenzbereiche		Anforderungen werden in den wesentlichen Bereichen überwiegend erfüllt	Anforderungen werden in den wesentlichen Bereichen zur Gänze erfüllt	Anforderungen werden in über das Wesentliche hinausgehendem Ausmaß erfüllt	Anforderungen werden in weit über das Wesentliche hinausgehendem Ausmaß erfüllt
Modellieren & Transferieren		Basismodelle im allgemeinen bzw. schulformspezifischen Kontext erstellen (im Sinne der Grundkompetenzen)	grundlegende Modelle aus dem allgemeinen bzw. schulformspezifischen Kontext bilden	über das Grundlegende hinausgehende Modelle aus dem allgemeinen bzw. schulformspezifischen Kontext bilden	Modelle im Bereich komplexer Problemstellungen und Sachzusammenhänge erstellen
Modellieren & Transferieren		Basiszusammenhänge aus dem Alltag in einfachster Form in die Mathematik transferieren und umgekehrt	grundlegende Zusammenhänge in mathematische Beschreibung transferieren	mathematische Zusammenhänge in berufsspezifische Bereiche übertragen und umgekehrt	komplexe mathematische Zusammenhänge in berufsfeldspezifische Bereiche übertragen und umgekehrt
Operieren & Technologieeinsatz		Rechen- und Konstruktionsabläufe auf Basis grundlegenden Operierens korrekt durchführen	auf Basis eines zugrunde liegenden tieferen Verstehens über die grundlegende Rechenkompetenz hinausgehend operieren	über die grundlegende Rechenkompetenz hinausgehend unter Nachweis eines kompetenten Technologieeinsatzes anspruchsvoll operieren	in komplexen bzw. anspruchsvollen Situationen, auf den jeweiligen Cluster abgestimmt, operieren
Operieren & Technologieeinsatz		grundlegende Technologiekompetenz nachweisen	operative Tätigkeiten zur Lösung grundlegender Problemstellungen an die jeweils verfügbare Technologie (im Mindestausmaß) auslagern und die Technologie adäquat einsetzen		über eine tiefgehende Werkzeugkompetenz verfügen und diese nachweisen
Reflektieren	Interpretieren & Dokumentieren	aus Informationen oder mathematischen Darstellungen grundlegende Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte im Mindestmaß interpretieren	vorgegebene mathematische Zusammenhänge und Ergebnisse in allgemeinen und schulformspezifischen Kontexten interpretieren	mathematische Zusammenhänge in Fachsprache interpretieren	komplexe mathematische Zusammenhänge, auf den jeweiligen Cluster abgestimmt, interpretieren
Reflektieren	Interpretieren & Dokumentieren	Lösungswege und Ergebnisse in grundlegender Form darstellen	Lösungsstrategien verständlich und nachvollziehbar darstellen	Lösungsstrategien in Fachsprache nachvollziehbar darstellen	komplexe Lösungsstrategien, auf den jeweiligen Cluster abgestimmt, dokumentieren
Reflektieren	Argumentieren & Kommunizieren*	grundlegende mathematische Sachverhalte erklären	mathematische Sachverhalte und Entscheidungen begründen	mathematische Sachverhalte und Entscheidungen unter Verwendung mathematischer Fachsprache begründen und erklären	mathematische Sachverhalte und Entscheidungen mit mathematischer Fachsprache unter Berücksichtigung unterschiedlicher Aspekte argumentieren, begründen und erklären

* verbales Kommunizieren nicht schriftlich überprüfbar

9.2 Ausgewählte Übungsklausuraufgaben

Bundes institut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Taschengeld

Aufgabennummer: A_002

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Sandra, Barbara und Monika erhalten heuer zum ersten Mal ein Taschengeld. Jede bekommt in diesem 1. Jahr 10 Euro monatlich. In den folgenden Jahren wird das monatliche Taschengeld Jahr für Jahr erhöht.

a) Sandra bekommt vom 2. Jahr bis einschließlich des 7. Jahres jährlich eine Erhöhung des monatlichen Taschengelds um 5 Euro. Ab dem 8. Jahr erhält sie jährlich einen um 30 % höheren Monatsbetrag als im Vorjahr. Stellen Sie die Höhe des monatlichen Taschengeldes in den ersten 10 Jahren in einem Stabdiagramm dar und geben Sie den Betrag (gerundet auf Euro) an, den Sandra im 10. Jahr monatlich erhält.

b) Barbara bekommt ab dem 2. Jahr und jedes weitere Jahr jeweils um 25 % mehr monatliches Taschengeld als im Vorjahr. Die Höhe des Monatsbetrags G in den einzelnen Jahren kann durch eine Gleichung mit der folgenden Form beschrieben werden:

$$G(n) = a \cdot b^{n-1}$$

G ... monatlicher Geldbetrag
n ... Anzahl der Jahre (heuer bedeutet $n = 1$)

Ermitteln Sie die Parameter a und b dieser Gleichung.

c) Die Entwicklung des Taschengeldes von Monika in den ersten 3 Jahren ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

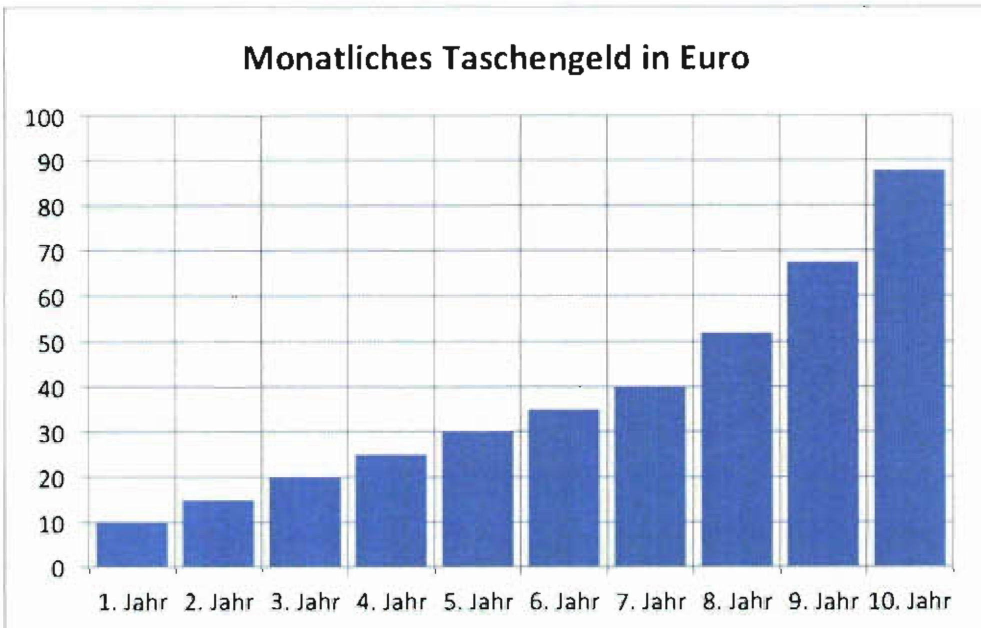
	monatliches Taschengeld in Euro
1. Jahr	10
2. Jahr	12
3. Jahr	14,4

Zeigen Sie, dass das monatliche Taschengeld von Monika sich in diesen 3 Jahren jeweils um den gleichen *Faktor* vermehrt, und geben Sie diesen an. Berechnen Sie das Taschengeld (auf Euro gerundet), welches Monika im 10. Jahr monatlich bekommt, wenn es sich weiterhin jährlich um diesen Faktor vermehrt.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	15	20	25	30	35	40	52	67,6	87,88

Im 10. Jahr bekommt Sandra jeden Monat rund 88 Euro Taschengeld.

b) heuer ... $n = 1 \rightarrow G = 10$
nächstes Jahr ... $n = 2 \rightarrow G = 10 \cdot 1{,}25$ ... 25 % mehr

$G(n) = a \cdot b^{n-1}$
$10 = a \cdot b^0$
$12{,}5 = a \cdot b^1$
$a = 10,\ b = 1{,}25$

Die Gleichung $G(n) = 10 \cdot 1{,}25^{n-1}$ beschreibt die Entwicklung des monatlichen Taschengelds, das Barbara in einzelnen Jahren bekommt.

c) $12 : 10 = 14{,}4 : 12$
Der Faktor ist 1,2.

Unter der Voraussetzung, dass der Faktor so bleibt, kann man eine Formel entwickeln oder durch fortlaufende Multiplikation in einer Tabelle mit Technologieeinsatz rechnen.

$G(10) = 10 \cdot 1{,}2^9 = 51{,}59 \approx 52$

Im 10. Jahr bekommt Monika monatlich rund 52 Euro Taschengeld.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) –
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Steinschleuder

Aufgabennummer: A_004

Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Andy hat eine einfache Steinschleuder gebaut. Er schießt zur Überprüfung des Geräts einen Stein vertikal nach oben. Der Stein steigt zunächst und fällt dann wegen der Erdanziehung wieder hinab.

Die vom Stein erreichte Höhe h ist von der Zeit t abhängig. Wenn die Abschusshöhe 1,7 m beträgt, kann die Höhe näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(t) = -5t^2 + 15t + 1{,}7$$

$h(t)$ ... Höhe zum Zeitpunkt t in Metern (m)
t ... Zeitpunkt nach dem Abschuss in Sekunden (s)

a) Die Steigungen der Tangenten an den Graphen der Funktion h geben Auskunft über die momentanen Geschwindigkeiten des Steins zu den einzelnen Zeitpunkten t.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h und die Tangente an den Graphen bei $t = 2$ s. Bestimmen Sie aus der Grafik ungefähr die Steigung der Tangente.

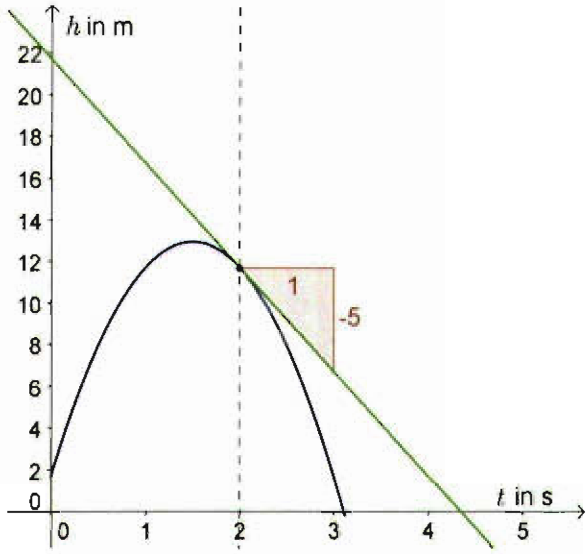
b) Die momentane Geschwindigkeit v berechnet man zu jedem Zeitpunkt t durch die 1. Ableitung der Funktion h. Berechnen Sie mithilfe der 1. Ableitung, mit welcher Geschwindigkeit v (in m/s) der Stein auf dem Boden auftrifft.

c) Erklären Sie, wie man mithilfe der 1. und der 2. Ableitung der Funktion h die maximale Höhe, die der Stein erreicht, berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Tangente hat an der Stelle t = 2 s die Steigung -5. *(Ableseungenauigkeit ist zu tolerieren!)*

b) Der Stein trifft auf dem Boden auf, wenn $h(t) = 0$.
$h(t) = -5t^2 + 15t + 1{,}7 = 0$ → Technologieeinsatz t = 3,109... s
Die weitere Rechnung erfolgt mit dem genauen Wert: 3,109...
Erst das Endergebnis wird gerundet.
$h'(t) = -10t + 15$
$h'(3{,}127...)$ -16,09
Die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf dem Boden beträgt rund 16,09 m/s.

c) Mit $h'(t) = 0$ berechnet man den Zeitpunkt, an dem ein Extremwert von h erreicht wird. Durch Einsetzen in die Gleichung für $h(t)$ wird dieser Extremwert berechnet. Das kann im Allgemeinen ein Maximum oder ein Minimum sein.

Um bei einem berechneten Extremwert zwischen einem Minimum und einem Maximum zu unterscheiden, benötigt man die 2. Ableitung. Sie beschreibt das Krümmungsverhalten der Funktion. Bei einem lokalen Maximum liegt eine negative Krümmung vor. Wenn man daher den Zeitpunkt, zu dem das Extremum erreicht wird, in die 2. Ableitung einsetzt, dann erhält man im Falle eines Maximums eine negative Zahl.

(Wenn jemand mit Geschwindigkeit und Beschleunigung argumentiert, weil er Kenntnisse aus der Physik einbringen kann, so ist das ebenfalls gültig!)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

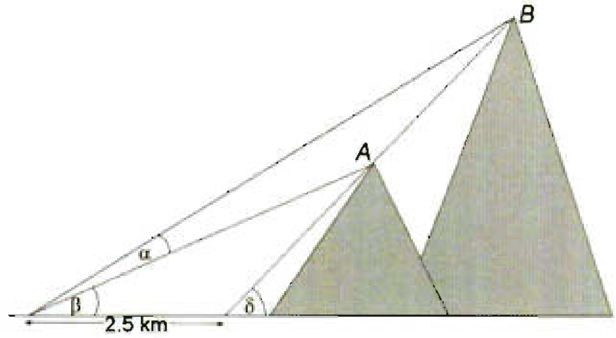
Bergwandern

Aufgabennummer: B-C9_05

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Finden Sie eine Text-Angabe, die zur nebenstehenden Zeichnung passt, wobei die Punkte A und B die Gipfel von 2 Bergen symbolisieren.

b) Berechnen Sie anhand der Skizze in a) die Entfernung der Bergspitzen A und B (Luftlinie), wenn die Winkel $\alpha = 2{,}8°$, $\beta = 18{,}7°$ und $\delta = 24{,}2°$ gemessen werden.
(Die Zeichnung ist nicht maßstabgetreu.)

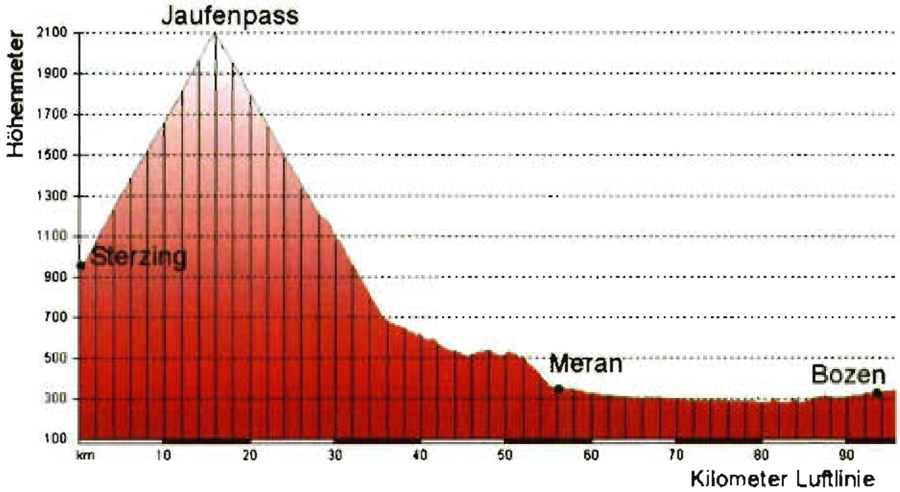


c) Beim Wandern in einer Gruppe rechnet man in ebenem Gelände mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit v von 4 Kilometern pro Stunde (km/h). Für den Aufstieg bzw. den Abstieg gilt die Formel:

$$t = \frac{\Delta H}{p} + \frac{e}{2v}$$

t … reine Gehzeit in Stunden (h)
ΔH … Höhendifferenz in Höhenmetern (m)
e … horizontale Entfernung (Luftlinie) in Kilometern (km)
v … Geschwindigkeit in km/h
p … in einer Stunde zurückgelegte Höhenmeter,
für den Anstieg gilt erfahrungsgemäß p = 300 m/h und für den Abstieg p = 500 m/h

Eine Gruppe Jugendlicher macht eine mehrtägige Treckingtour in Südtirol und wandert von Sterzing über den Jaufenpass nach Bozen.
Ermitteln Sie anhand des Höhenprofils näherungsweise die Gehzeiten für den Aufstieg von Sterzing auf den Jaufenpass, für den Abstieg nach Meran und für die ebene Strecke nach Bozen sowie die Gesamtgehzeit in Stunden.

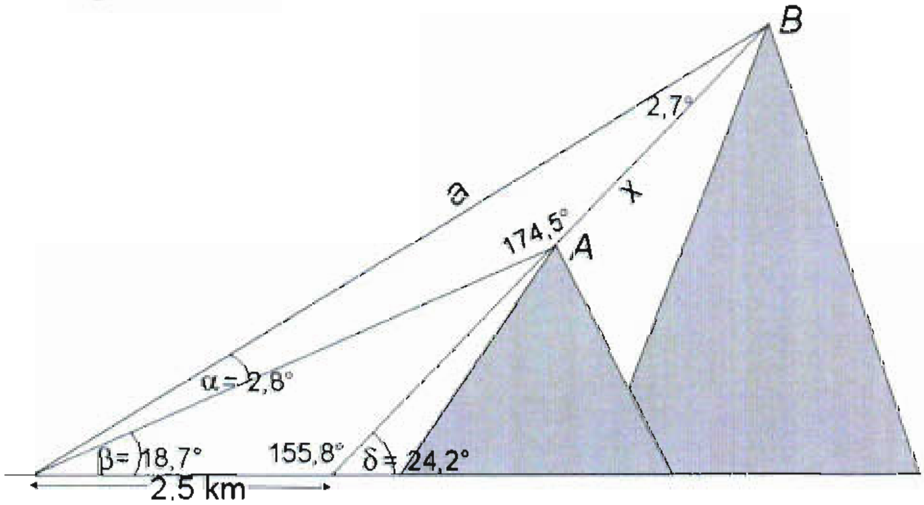


Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für einen Beobachter in einem bestimmten Punkt eines ebenen Tales scheint es, als ob der Berggipfel A von einem zweiten, dahinterliegenden Berggipfel B um den Winkel α überragt wird; der Höhenwinkel von A beträgt β. Wandert dieser Beobachter 2,5 km gegen die Berge hin, so „verschwindet" für ihn der Gipfel B hinter dem Gipfel A, der in diesem Augenblick einen Höhenwinkel von δ aufweist.

b) Alle nötigen Winkel berechnen.



Sinussatz: $\frac{2{,}5}{\sin 2{,}7} = \frac{a}{\sin 155{,}8}$

$a = 21{,}755$ km

Sinussatz: $\frac{x}{\sin 2{,}8} = \frac{21{,}755}{\sin 174{,}5}$

$x = 11{,}1$ km

Die beiden Berggipfel A und B sind ca. 11 km voneinander entfernt.
(Es sind auch andere Lösungswege möglich und erlaubt.)

c) Sterzing – Jaufenpass: von 950 m auf 2 100 m: 1 150 m Aufstieg

$t = \frac{1150}{300} + \frac{16}{8} = 5{,}8 \sim 6$ h

Jaufenpass – Meran: von 2 100 m auf 350 m: 1 750 m Abstieg

$t = \frac{1750}{500} + \frac{40}{8} = 8{,}5$ h

Meran – Bozen: keine Steigung, 94 km – 56 km = 38 km

$t = \frac{38}{4} = 9{,}5$ h

Die Wandergruppe hat ca. 25 Stunden reine Gehzeit.
(Die Genauigkeit beim Ablesen sollte großzügig beurteilt werden (± 50 m tolerieren).)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 9

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 4
c) mittel	c) 3

Themen: Sport, Tourismus

Quelle: Höhenprofil: http://www.alpenrennradtouren.de

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Digitalkameras

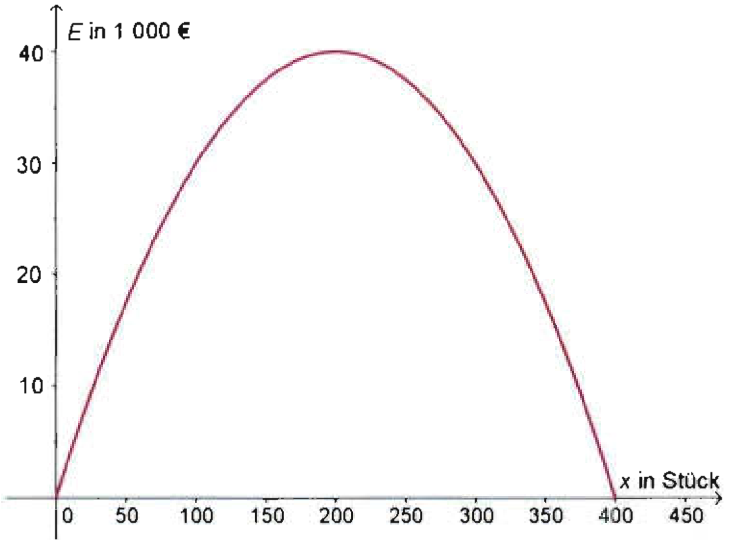
Aufgabennummer: B-C6_10

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine spezielle Ausgabe von Digitalkameras wird verkauft.

a) – Erklären Sie, wie die langfristige Preisuntergrenze aus den Produktionskosten *K*, die bei der Erzeugung der Kameras anfallen, ermittelt werden kann.
– Argumentieren Sie, welche Bedeutung die langfristige Preisuntergrenze für den Betrieb hat.

b) Die Erlösfunktion *E* wird durch die angegebene Grafik dargestellt.



– Lesen Sie aus dem Graphen die Erlösgrenzen, die Verkaufsmenge für das Erlösmaximum sowie das Erlösmaximum ab.
– Begründen Sie, warum der Erlös trotz steigendem Absatz *x* nach Erreichen eines Maximums sinkt und sogar null werden kann.

c) Der Gewinn *G* kann in Abhängigkeit von der Anzahl verkaufter Kameras *x* näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$G(x) = -x^2 + 370x - 2\,896$$

x … Anzahl der verkauften Kameras in Stück
$G(x)$ … Gewinn bei x Stück in Euro (€)

– Berechnen Sie die Gewinngrenzen (Break-even-Point und die obere Gewinngrenze) sowie das Gewinnmaximum.
– Interpretieren Sie die auftretenden Verlustzonen.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Aus den gesamten Kosten K kann man die Stückkosten $\overline{K}$ ermitteln, die bei der Erzeugung einer einzelnen Kamera anfallen, indem man durch die produzierte Stückzahl x dividiert.

Die langfristige Preisuntergrenze entspricht den minimalen Stückkosten, die man mithilfe der Differenzialrechnung bestimmen kann.
Aus der Gleichung $\overline{K}(x)' = 0$ berechnet man die Menge x_{opt}, bei der die Stückkosten minimal werden.
Diese Menge setzt man in den Term für die Stückkosten ein und erhält so die langfristige Preisuntergrenze.

Produziert der Betrieb die Menge x_{opt} und kann die gesamte Produktion zu einem Preis verkauft werden, der der langfristigen Preisuntergrenze entspricht, dann arbeitet der Betrieb kostendeckend. Er macht weder einen Gewinn noch einen Verlust.

b) Die Erlösgrenzen sind die Nullstellen der Funktion:
$x_1 = 0$ und $x_2 = 400$ Stück.
Das Erlösmaximum liegt bei 200 Stück und beträgt ungefähr € 40.000.

Verkauft man mehr als 200 Stück, so wird der Erlös laufend geringer. Ein Grund dafür kann der geringer werdende Verkaufspreis sein.
Der Erlös wird bei Erreichen der sogenannten Marktsättigung null. Das ist bei 400 Stück der Fall. Der Preis wird null. Es besteht kein Interesse am Produkt, es kann nicht mehr verkauft werden.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert.

c) Gewinngrenzen: $G(x) = 0$
$-x^2 + 370x - 2\,896 = 0$

Technologieeinsatz:
$x_1 = 8$ Stück und $x_2 = 362$ Stück
Bei $x < 8$ Stück ist die Verkaufsmenge zu gering, um die Kosten zu decken, bei $x > 362$ Stück wird die Verkaufsmenge zu groß, die Herstellungskosten sind zu hoch oder der Verkaufspreis zu gering. In beiden Fällen wird ein Verlust zu erwarten sein.

Maximaler Gewinn:

$G'(x) = 0$
$-2x + 370 = 0$
$x = 185$
$G(185) = 31\,329$

Maximalen Gewinn erzielt man bei einem Verkauf von 185 Kameras.
Der maximale Gewinn beträgt € 31.329.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 6

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

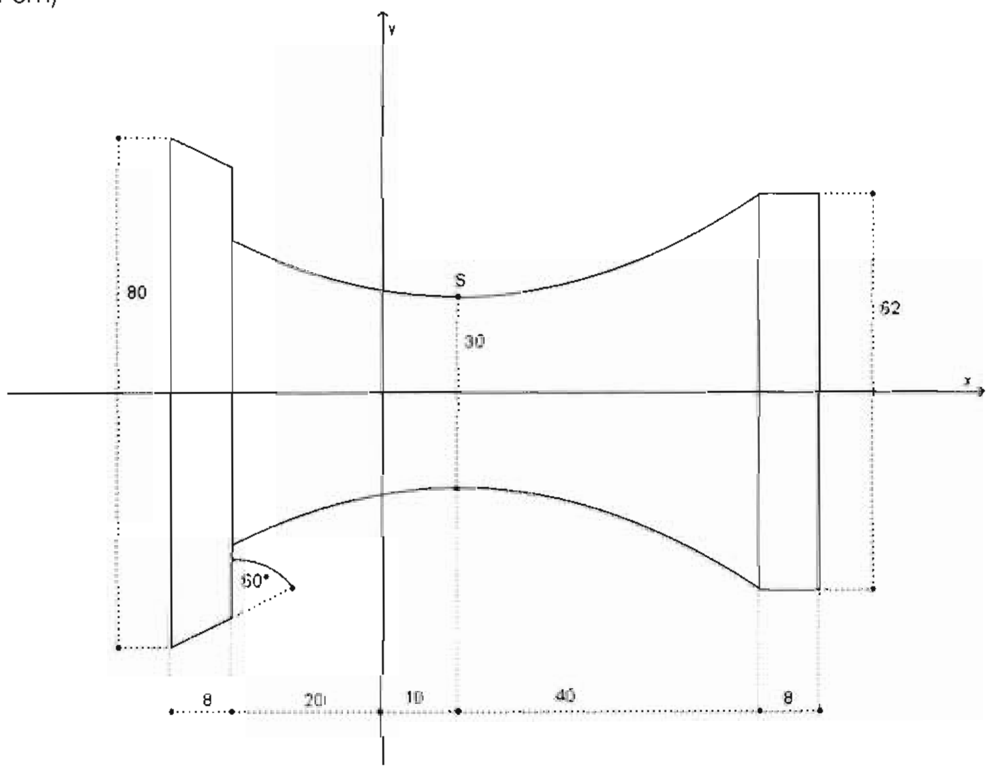
Drechseln

Aufgabennummer: B-C1_03

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die folgende Abbildung zeigt den Längsschnitt eines rotationssymmetrischen Körpers, der durch eine um die x-Achse drehende Parabel mit einem aufgesetzten Drehkegelstumpf und einem Drehzylinder entsteht. Die Formgebung erfolgt durch Drechseln eines Holzzylinders.

(Maße in cm)



a) – Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Parabel. Wählen Sie einen anderen Ursprung des Koordinatensystems als in der Abbildung dargestellt.

b) – Berechnen Sie die Bogenlänge der oben dargestellten Parabel, die durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

c) – Berechnen Sie den Abfall in Prozent, der bei der Herstellung des Drehteils anfällt, wenn der Rohling einen Durchmesser d = 8,5 dm hat und die Parabel durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

d) Gegeben sind folgende Funktionen:

$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ und $g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2\,174}{49}$

Bei Rotation von Flächenstücken um die x-Achse entstehen Rotationskörper, deren Volumina durch folgende Formeln berechnet werden können:

$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 \, dx$

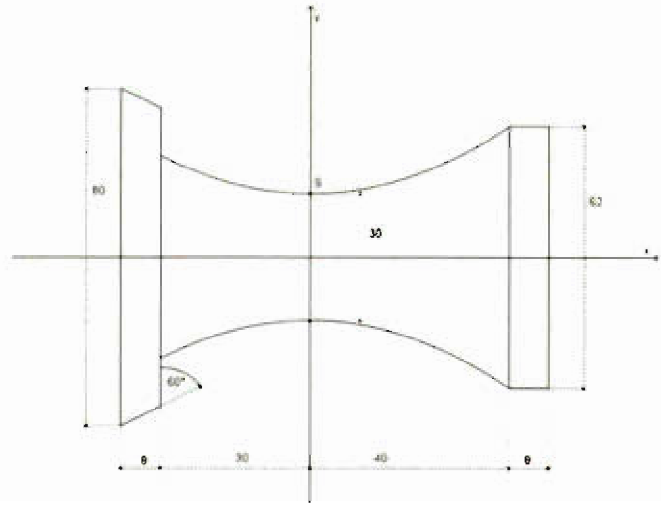
$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] \, dx$

Stellen Sie für jede der beiden Volumsformeln das rotierende Flächenstück grafisch dar.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems – siehe Abbildung rechts



$S\ (0|15)$, $h(x) = a \cdot x^2 + n$

$n = 15$
$P\ (40|31)$
$31 = a \cdot 40^2 + 15 \Rightarrow a = \frac{1}{100}$

$h(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 + 15$

Mit einer anderen Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems sind weitere Funktionsgleichungen der Parabel möglich.

b) $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$; $y'(x) = \frac{1}{50} \cdot x - 0{,}2$
$s = \int_{-20}^{50} \sqrt{1 + y'^2} \approx 75{,}64$ cm

Die Bogenlänge der Parabel beträgt 75,64 cm.

c) Drehkegelstumpf:
$\tan 30 = \frac{r_1 - r_2}{8} \Rightarrow r_1 - r_2 = 4{,}618\ldots \approx 4{,}62$ cm
$V_{\text{Drehkegelstumpf}} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$
$V_{\text{Drehkegelstumpf}} \approx 35{,}75\ \text{dm}^3$

Drehzylinder:
$V_{\text{Drehzylinder}} = r^2 \cdot \pi \cdot h$
$V_{\text{Drehzylinder}} = 24\,152{,}56\ldots\ \text{cm}^3 \approx 24{,}15\ \text{dm}^3$

Parabel:
$y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$
$V_{\text{Parabel}} = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (y(x))^2\, dx$
$V_{\text{Parabel}} = \pi \cdot 27\,384 = 86\,029{,}37\ldots\ \text{cm}^3 \approx 86{,}03\ \text{dm}^3$

$V = V_{\text{Drehkegelstumpf}} + V_{\text{Drehzylinder}} + V_{\text{Parabel}} \approx 145{,}93\ \text{dm}^3$

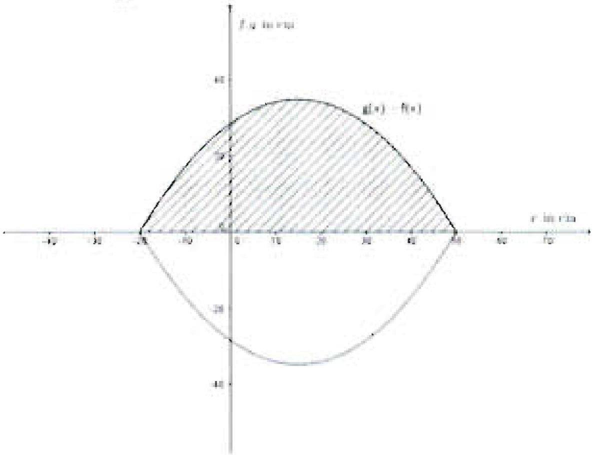
Rohling:
$V_{\text{Rohling}} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h$
$V_{\text{Rohling}} = 488\,007{,}14\ldots\ \text{cm}^3 \approx 488{,}01\ \text{dm}^3$

Abfall in Prozent:
$1 - \frac{145{,}932}{488{,}01} = 0{,}7009 \approx 70{,}1\ \%$
Bei der Herstellung des Drehteils fallen 70,1 % Abfall an.

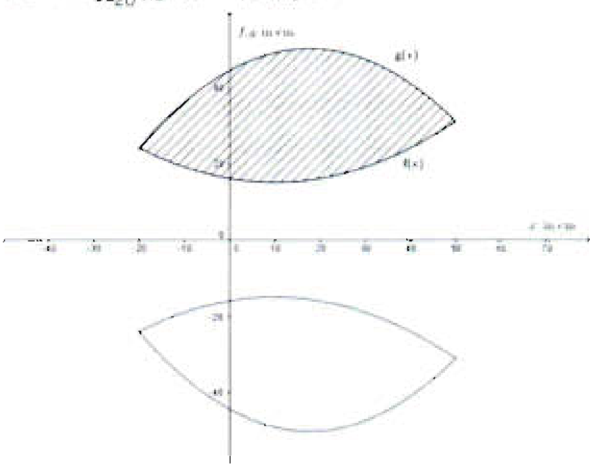
d) Die Volumsformeln ergeben die folgenden schraffierten Flächenstücke, die um die x-Achse rotieren:

$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ und $g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2\,174}{49}$

$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 \, dx$



$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] \, dx$



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 1

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 4
d) mittel	d) 4

Thema: Maschinenbau

Quellen: –

Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Grenzkosten und Stückkosten

Aufgabennummer: B-C6_13

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als Grenzkostenfunktion K' bezeichnet man die 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion K. Bei der Herstellung eines bestimmten Produkts während zweier aufeinanderfolgender Herstellungsperioden können die Grenzkosten durch eine lineare Grenzkostenfunktion K_1' (Abb. 1) und eine quadratische Grenzkostenfunktion K_2' (Abb. 2) beschrieben werden.

x ... Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K_1'(x)$, $K_2'(x)$ ... Grenzkosten in Euro pro Stück (€/Stk.) bei x erzeugten Stk.

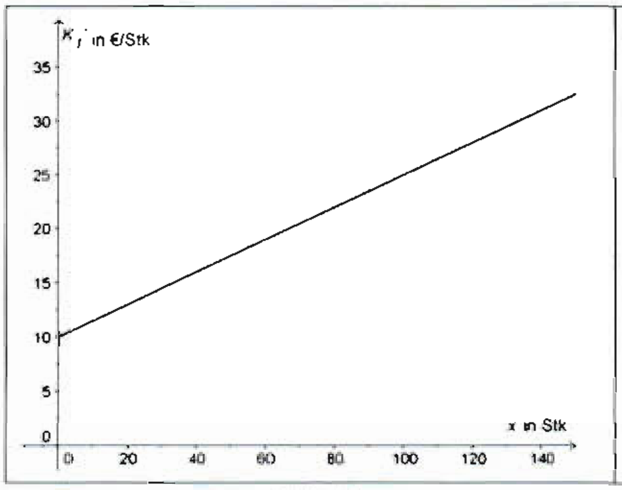


Abb. 1

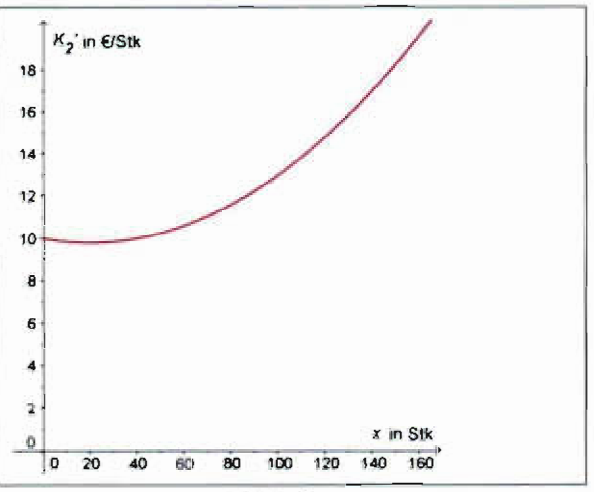


Abb. 2

a) – Ermitteln Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion K_1' aus dem Graphen der Abb. 1.
   – Berechnen Sie mithilfe der Grenzkostenfunktion K_1' die Gesamtkostenfunktion K_1, wenn die Fixkosten € 260 betragen.

b) Die Kostenkehre ist die Herstellungsmenge, bei der der Graph der Kostenfunktion ihren Wendepunkt hat.

   – Erklären Sie, wie Sie aus dem Graphen einer Grenzkostenfunktion die Kostenkehre ablesen können.
   – Begründen Sie, warum der Verlauf von einer der beiden Grenzkostenfunktionen (Abb. 1 oder Abb. 2) auf eine Kostenkehre schließen lässt und dies für die andere nicht gilt.

c) Die Kostenfunktion für die Herstellung eines anderen Produkts lautet:

$$K(x) = 0{,}0006x^3 + 0{,}02x^2 + 10x + 250$$

x … Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K(x)$ … Gesamtkosten in Euro (€) bei Erzeugung von x Stk.

- Ermitteln Sie die Gleichungen der Grenzkostenfunktion K' und der Stückkostenfunktion $\overline{K} = \frac{K}{x}$.
- Zeichnen Sie im Definitionsbereich [0;250] die Graphen der beiden Funktionen K' und $\overline{K}$ in ein Koordinatensystem.
- Interpretieren Sie den Schnittpunkt der beiden Kurven im Zusammenhang mit dem Betriebsoptimum und den minimalen Stückkosten.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $k = \frac{\Delta K'}{\Delta x} = \frac{3}{20} = 0{,}15;\ d = 10$

Falls die Ablesung falsch war, so ist der Folgefehler nicht zu berücksichtigen.
Eine ungenaue Ablesung ist zu tolerieren.

$K_1'(x) = 0{,}15x + 10$

$K_1(x) = \int (0{,}15x + 10)\mathrm{d}x$

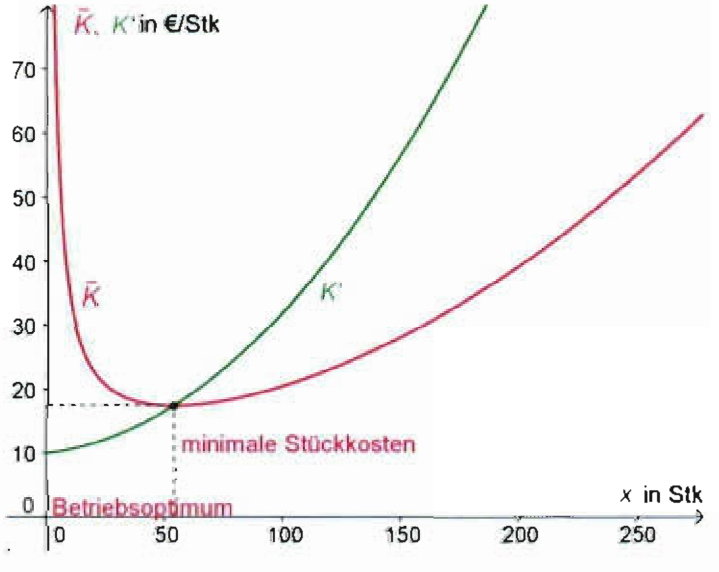
$K_1(x) = 0{,}075x^2 + 10x + 260$

b) Die Grenzkostenfunktion bildet die 1. Ableitung der Kostenfunktion. An der Kostenkehre hätte die 2. Ableitung den Wert null. Man erkennt sie daher an einem Extremwert der Grenzkostenfunktion.

Abb. 1 stellt eine lineare Grenzkostenfunktion dar. Sie hat keinen Extremwert, daher liegt auch kein Wendepunkt vor.

Abb. 2 stellt eine quadratische Funktion dar, bei der der x-Wert des Minimums der Kostenkehre entspricht.

c) $K'(x) = 0{,}0018\,x^2 + 0{,}04x + 10$
$\overline{K}(x) = 0{,}0006x^2 + 0{,}02x + 10 + \frac{250}{x}$



Die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven ergibt das Betriebsoptimum und dessen y-Koordinate ergibt die minimalen Stückkosten.

Die Grenzkosten im Betriebsoptimum entsprechen den minimalen Stückkosten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 6

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) –
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren; B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Herstellungskosten

Aufgabennummer: B-C6_07

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 6x + 40$$

$K(x)$ … Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)
x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)

Der Betrieb erzeugt pro Tag höchstens 30 ME dieses Produkts.

a) Interpretieren Sie die gegebene Kostenfunktion hinsichtlich der folgenden mathematischen Eigenschaften:
- sinnvoller Definitionsbereich
- Monotonie und Krümmungsverhalten
- Fixkosten

b) Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind, und wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind. Stellen Sie die Kostenfunktion grafisch dar und zeichnen Sie die beiden berechneten Wertepaare ein.

c) Erstellen Sie die Stückkostenfunktion (= Durchschnittskostenfunktion) und berechnen Sie das Betriebsoptimum mit der langfristigen Preisuntergrenze.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

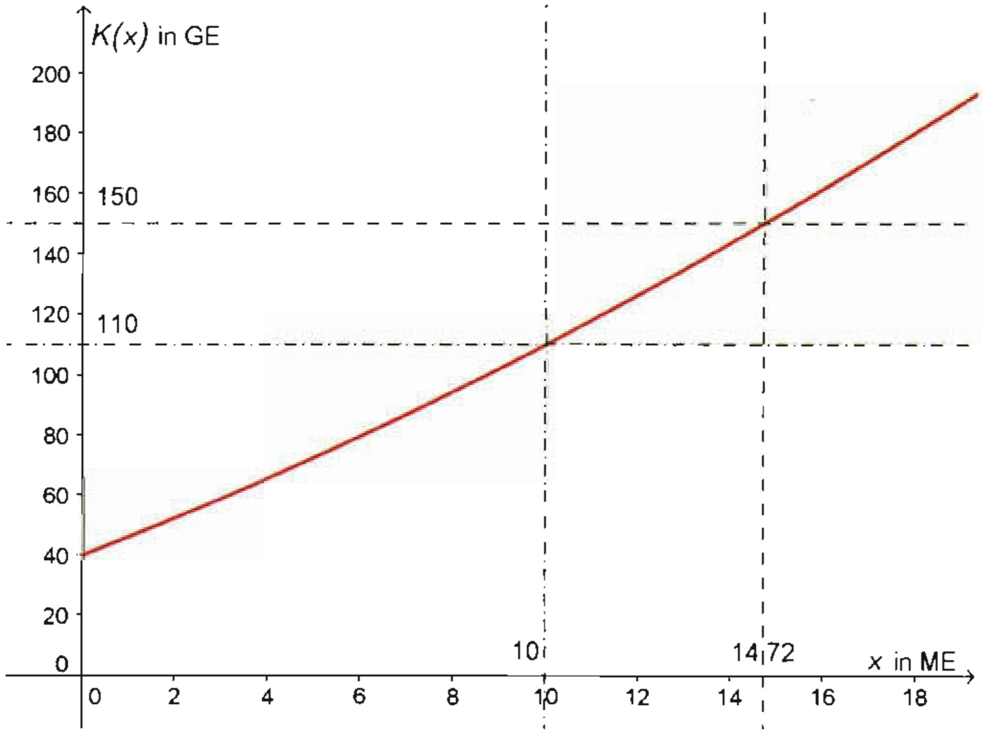
Möglicher Lösungsweg

a) Der Definitionsbereich ist [0;30].

Die Kostenfunktion ist im angegebenen Definitionsbereich streng monoton steigend.
Die Kosten steigen progressiv, der Graph der Kostenfunktion hat im betrachteten Bereich eine positive Krümmung.

Die Fixkosten betragen $K(0) = 40$ GE.

b) Bei Kosten von 150 GE werden rund 14,72 ME erzeugt.
Die Herstellung von 10 ME kostet 110 GE.



c) $\frac{K(x)}{x} = \bar{K}(x) = 0{,}1x + 6 + \frac{40}{x}$

$\bar{K}(x)' = 0{,}1 - \frac{40}{x^2} = 0$

$x = 20$
$\bar{K}(20) = 10$

Das Betriebsoptimum beträgt 20 ME.
Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 10 GE/ME.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 6

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) leicht	b) 3
c) mittel	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Kupferbestimmung

Aufgabennummer: B-C5_01

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um die Konzentration von Kupferlösungen zu ermitteln, wird bei der photometrischen Kupferbestimmung die Absorption des Lichts bei einer definierten Wellenlänge am dunkelblauen Kupfertetraaminkomplex gemessen. Zuerst wird über die Messung der Absorption von Kupferlösungen bekannter Konzentration eine Kalibriergerade bestimmt.
Die Absorption von 4 Eichlösungen wurde gemessen:

Konzentration Cu^{2+} (in g pro ℓ)	0,08	0,16	0,24	0,32
Absorption	0,06	0,13	0,19	0,27

g ... Gramm
ℓ ... Liter

a) Für die Ermittlung der Kalibriergeraden ($y = k \cdot x + d$) wird die Methode der kleinsten Quadrate herangezogen. Geben Sie die Funktion R der kleinsten Quadrate an, die zur Berechnung der Funktionsparameter k und d dient, und beschreiben Sie in Worten die weitere Vorgangsweise, um k und d zu berechnen.

b) Berechnen Sie anhand der Tabelle mithilfe der linearen Regression die Kalibriergerade, geben Sie den Korrelationskoeffizienten r an und interpretieren Sie die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten r.

c) Im Zuge einer weiteren Kupferbestimmung wurde die Kalibriergerade mit folgender Funktionsgleichung bestimmt:

$$y = 1{,}9x + 0{,}003$$

Zur Bestimmung des Kupfergehalts wurden 0,300 Gramm einer Messingprobe in Salpetersäure aufgelöst und auf 500 Milliliter (mℓ) mit Wasser aufgefüllt. Daraus wurden 10 mℓ der Probenvorbereitung unterzogen und dabei auf 100 mℓ aufgefüllt. Die Probe ergab schließlich eine Absorption von 0,073.
Berechnen Sie den Prozentgehalt von Kupfer in der Messingprobe.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Funktion der kleinsten Quadrate R ergibt sich durch die Differenz der Funktionswerte der zu berechnenden Geraden und der gemessenen Werte.

$R(k,d) = (0{,}08k - d - 0{,}06)^2 + (0{,}16k - d - 0{,}13)^2 + (0{,}24k - d - 0{,}19)^2 - (0{,}32k - d - 0{,}27)^2$

Es handelt sich um ein Extremwertproblem mit 2 Variablen (k, d). Zur Berechnung der Parameter k und d werden die partiellen Ableitungen nach k und nach d jeweils gleich null gesetzt. Danach werden k und d aus diesen Gleichungen berechnet.

b) Berechnung durch lineare Regressionsanalyse, z. B. in Excel, GeoGebra etc.:

$y = 0{,}8625x - 0{,}01$
$r = 0{,}9985$

Der Korrelationskoeffizient r liegt stets im Intervall [-1;1]. Er beschreibt, wie gut der tatsächliche Zusammenhang durch die Regressionsgerade genähert wird. Die Näherung ist umso besser, je näher der Betrag von r bei 1 liegt. Ein Korrelationskoeffizient nahe 0 bedeutet, dass kein linearer Zusammenhang zwischen den zwei Größen erkennbar ist.
(Sinngemäß richtige andere Formulierungen sind ebenfalls möglich.)

c) Die Konzentration der Probelösung wird durch Einsetzen der Absorption und Umformen der Funktionsgleichung der Eichgeraden ermittelt:

$0{,}073 = 1{,}9x + 0{,}003$

$$x = \frac{0{,}073 - 0{,}003}{1{,}9} = 0{,}0368 \text{ g}/\ell$$

In 0,1 ℓ befinden sich also $3{,}68 \cdot 10^{-3}$ g Kupfer. Da diese Menge an Kupfer den 10 mℓ aus der Stammlösung entspricht, befand sich in 500 mℓ Stammlösung das 50-Fache dieser Menge.

$m_{Cu} = 50 \cdot 3{,}68 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 0{,}184 \text{ g}$

Prozentsatz $= \frac{0{,}184}{0{,}300} \cdot 100 = 61{,}33\ \%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 5

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) –
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 3
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 3

Thema: Chemie

Quellen: –

Bundesinstitut bifie Wien Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Kupferbestimmung

Aufgabennummer: B-C5_01

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um die Konzentration von Kupferlösungen zu ermitteln, wird bei der photometrischen Kupferbestimmung die Absorption des Lichts bei einer definierten Wellenlänge am dunkelblauen Kupfertetraaminkomplex gemessen. Zuerst wird über die Messung der Absorption von Kupferlösungen bekannter Konzentration eine Kalibriergerade bestimmt.
Die Absorption von 4 Eichlösungen wurde gemessen:

Konzentration Cu^{2+} (in g pro ℓ)	0,08	0,16	0,24	0,32
Absorption	0,06	0,13	0,19	0,27

g … Gramm
ℓ … Liter

a) Für die Ermittlung der Kalibriergeraden ($y = k \cdot x + d$) wird die Methode der kleinsten Quadrate herangezogen. Geben Sie die Funktion R der kleinsten Quadrate an, die zur Berechnung der Funktionsparameter k und d dient, und beschreiben Sie in Worten die weitere Vorgangsweise, um k und d zu berechnen.

b) Berechnen Sie anhand der Tabelle mithilfe der linearen Regression die Kalibriergerade, geben Sie den Korrelationskoeffizienten r an und interpretieren Sie die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten r.

c) Im Zuge einer weiteren Kupferbestimmung wurde die Kalibriergerade mit folgender Funktionsgleichung bestimmt:

$$y = 1{,}9x + 0{,}003$$

Zur Bestimmung des Kupfergehalts wurden 0,300 Gramm einer Messingprobe in Salpetersäure aufgelöst und auf 500 Milliliter (mℓ) mit Wasser aufgefüllt. Daraus wurden 10 mℓ der Probenvorbereitung unterzogen und dabei auf 100 mℓ aufgefüllt. Die Probe ergab schließlich eine Absorption von 0,073.
Berechnen Sie den Prozentgehalt von Kupfer in der Messingprobe.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Funktion der kleinsten Quadrate R ergibt sich durch die Differenz der Funktionswerte der zu berechnenden Geraden und der gemessenen Werte.

$R(k,d) = (0{,}08k - d - 0{,}06)^2 + (0{,}16k - d - 0{,}13)^2 + (0{,}24k - d - 0{,}19)^2 - (0{,}32k - d - 0{,}27)^2$

Es handelt sich um ein Extremwertproblem mit 2 Variablen (k, d). Zur Berechnung der Parameter k und d werden die partiellen Ableitungen nach k und nach d jeweils gleich null gesetzt. Danach werden k und d aus diesen Gleichungen berechnet.

b) Berechnung durch lineare Regressionsanalyse, z. B. in Excel, GeoGebra etc.:

$y = 0{,}8625x - 0{,}01$
$r = 0{,}9985$

Der Korrelationskoeffizient r liegt stets im Intervall $[-1;1]$. Er beschreibt, wie gut der tatsächliche Zusammenhang durch die Regressionsgerade genähert wird. Die Näherung ist umso besser, je näher der Betrag von r bei 1 liegt. Ein Korrelationskoeffizient nahe 0 bedeutet, dass kein linearer Zusammenhang zwischen den zwei Größen erkennbar ist.
(Sinngemäß richtige andere Formulierungen sind ebenfalls möglich.)

c) Die Konzentration der Probelösung wird durch Einsetzen der Absorption und Umformen der Funktionsgleichung der Eichgeraden ermittelt:

$0{,}073 = 1{,}9x + 0{,}003$

$$x = \frac{0{,}073 - 0{,}003}{1{,}9} = 0{,}0368\ \mathrm{g}/\ell$$

In 0,1 ℓ befinden sich also $3{,}68 \cdot 10^{-3}$ g Kupfer. Da diese Menge an Kupfer den 10 mℓ aus der Stammlösung entspricht, befand sich in 500 mℓ Stammlösung das 50-Fache dieser Menge.

$m_{Cu} = 50 \cdot 3{,}68 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g} = 0{,}184\ \mathrm{g}$

Prozentsatz $= \frac{0{,}184}{0{,}300} \cdot 100 = 61{,}33\ \%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 5

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) –
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Chemie

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Wien : Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Rücklage

Aufgabennummer: B-C6_09

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Eltern von Martin legen für ihn 5 Jahre vor Abschluss der höheren Schule für sein späteres Studium € 22.500 als Rücklage auf ein Sparkonto an.
Lisa erhält von ihren Eltern ab demselben Zeitpunkt 5 Jahre lang € 375 monatlich vorschüssig auf ein Sparkonto, das mit dem gleichen Jahreszinssatz wie bei Martin verzinst wird.
Der Zinssatz bleibt während dieser 5 Jahre konstant, es finden keine weiteren Transaktionen auf den beiden Konten von Martin und Lisa statt und es gibt keine Kontoführungsgebühr.

a) – Erstellen Sie für den Geldwert der beiden Rücklagen je eine Zeitlinie mit jährlichen Abständen.
   – Erklären Sie, mit welchem Rechenansatz man aus dem Jahreszinssatz den monatlichen gleichwertigen Zinssatz i_{12} anhand der Zinseszinsformel herleiten kann. (Die Kapitalertragsteuer ist bei dieser Berechnung nicht zu berücksichtigen.)

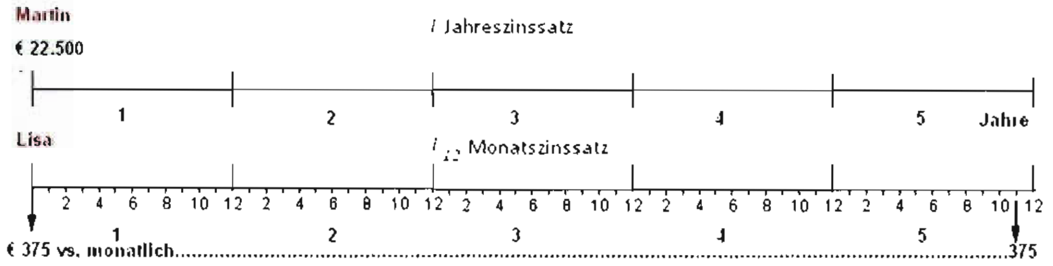
b) Lisa meint, dass zwar 60-mal € 375 wie bei Martin ebenfalls € 22.500 ergeben, aber die vorschüssige monatliche Ratenzahlung bei Verzinsung mit 0,2 % p. m. einem geringeren Barwert entspricht.
   – Argumentieren Sie, weshalb Lisas Aussage stimmt.
   – Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Barwert der Ratenzahlung bei Lisa und dem Geldbetrag, den Martin von seinen Eltern erhält.
   Runden Sie das Ergebnis auf Euro.
   (Die Kapitalertragsteuer ist im gegebenen Zinssatz bereits berücksichtigt.)

c) Für Martin wird das Geld mit einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt.
   Lisa möchte statt € 375 pro Monat 5 nachschüssige jährliche Raten von € 4.500 erhalten. Sie wünscht, dass der Zinssatz so hoch gewählt werden soll, dass sie nach 5 Jahren einen gleich hohen Betrag wie Martin bekommt.
   – Berechnen Sie, wie groß der jährliche Zinssatz für Lisa unter dieser Voraussetzung sein müsste. Berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 % pro Jahr.
   Runden Sie das Ergebnis auf 2 Dezimalstellen.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zeitlinie



Zinssätze werden normalerweise in Prozent pro Jahr angegeben (auch wenn sie unterjährig fließen). Ein gleichwertiger monatlicher Zinssatz führt bei monatlicher Verzinsung in einem Jahr zum gleichen Ergebnis wie eine einmalige jährliche Verzinsung.
Wenn man ein Kapital K_0 ein Jahr lang mit i verzinst, so ergibt dies einen Endwert von:
$E = K_0 \cdot (1 + i)$
Wenn man das gleiche Anfangskapital monatlich mit i_{12} verzinst, lautet die Zinseszinsformel:
$E = K_0 \cdot (1 + i_{12})^{12}$
Da beide Endwerte gleich sein sollen, gilt:
$1 + i = (1 + i_{12})^{12}$
Aus diesem Ansatz lässt sich der gleichwertige Monatszinssatz i_{12} berechnen.

b) Martin bekommt bar € 22.500.
Lisa würde in Zukunft monatlich € 375 bekommen, 60 Monate lang.
Um den Barwert dieser Ratenzahlung zu erhalten, müssen alle einzelnen 60 Raten auf den Anfangszeitpunkt abgezinst werden. Man erhält eine Folge von Beträgen:
{375; 374,25; 373,5 ...}
Die Summe dieser Beträge ergibt den Barwert und ist kleiner als 375 mal 60.

Martin: 22 500

Lisa: $375 \cdot 1{,}002^{-59} \cdot \frac{1{,}002^{60} - 1}{0{,}002} = 21\,224{,}852\ldots \approx 21\,225$

Die Differenz beträgt rund € 1.275.

Der Rechenweg ist offen und kann anders sein als hier.

c) Rechenansatz: $2{,}5 \cdot 0{,}75 = 1{,}875$ ... Berücksichtigung der KESt bei Martin

$22\,500 \cdot 1{,}01875^5 = 4\,500 \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1}$

Lösung mit Technologieeinsatz: $r = 1{,}046457\ldots$

Dies entspricht ungefähr 4,65 % nach KESt.

Bei rund 4,65 % Jahresverzinsung, die bereits die KESt berücksichtigt, würde Lisa nach 5 Jahren den gleichen Betrag wie Martin bekommen.

Es sind auch andere Rechenwege möglich!

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 6

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 4
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Saftpackung

Aufgabennummer: B-C9_07

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Saftpackung hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge a und der Füllhöhe h (Abb. 1). Sie enthält 1 Liter Saft.

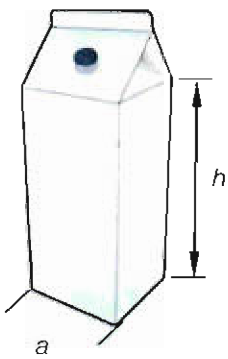


Abb. 1

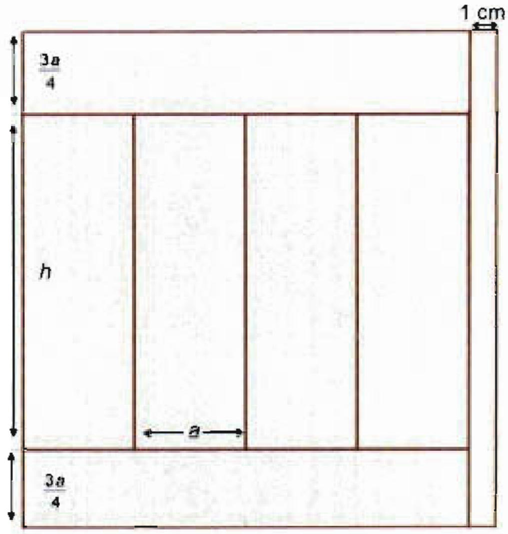


Abb. 2

Die Packung wird aus einem beschichteten Karton in Rechteckform gefertigt (Abb. 2), dessen Fläche sich mit der folgenden Formel berechnen lässt:

$$A = 6a^2 + \frac{3a}{20} + \frac{4}{a} + \frac{1}{10a^2}$$

A … Flächeninhalt in dm²
a … Länge der Seitenkante in dm

a) Zeigen Sie die Richtigkeit der angegebenen Formel für A. Verwenden Sie dazu die Angaben aus Abb. 2 und die Formel $V = a^2 \cdot h$ für das Volumen V der eingefüllten Flüssigkeit bei einer Füllmenge von $V = 1$ Liter.

b) Die Abb. 3 zeigt die Abhängigkeit der für die 1-Liter-Packung benötigten Kartonfläche A von der Seitenkante a. Interpretieren Sie den Verlauf der Funktion in einer sinnvollen Definitionsmenge.

c) Berechnen Sie mithilfe der Differenzialrechnung jene Länge der Seite a, für welche die Fläche A minimal ist. Überprüfen Sie mit der 2. Ableitung, ob die berechnete Seite tatsächlich zum Minimum der Fläche führt.

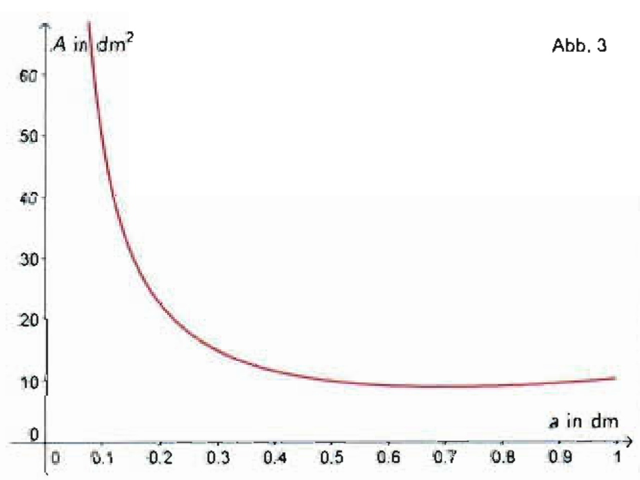
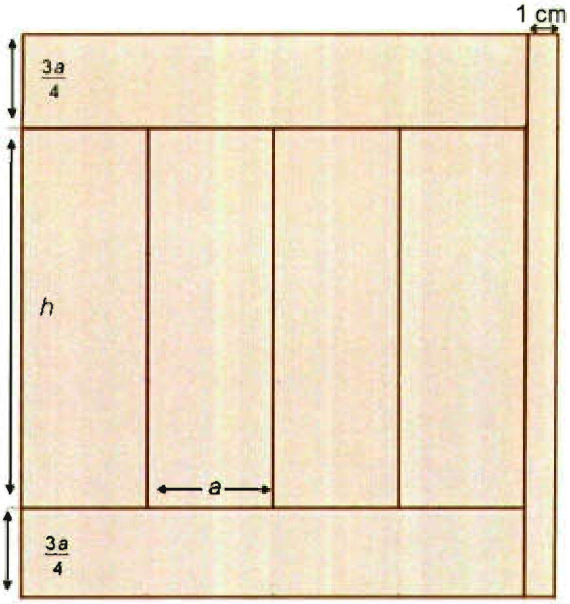


Abb. 3

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Fläche des Materials, aus dem die Packung hergestellt wird, setzt sich aus Rechtecken zusammen.

Beachtung von $a^2 \cdot h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{a^2}$

$A = 4a \cdot h + \frac{6a}{4} \cdot 4a + 0{,}1\,(\frac{6a}{4} + h)$

Das Ausmultiplizieren und Vereinfachen liefert:

$A = 6a^2 + 0{,}15a + \frac{4}{a} + \frac{0{,}1}{a^2}$

In Bruchform:

$A = 6a^2 + \frac{3a}{20} + \frac{4}{a} + \frac{1}{10a^2}$

b) Die Funktion A ist für $a = 0$ nicht definiert: Die Seitenkante a der Saftpackung kann nicht null sein. Der Definitionsbereich von A enthält daher reelle Zahlen $a > 0$.

Sehr kleine Werte von a bedeuten, dass die Füllhöhe groß sein muss, die Packung ist hoch und schmal.
Je größer a wird, desto kleiner wird die Füllhöhe der 1-Liter-Packung. Die Packung wird breiter und niedriger. Theoretisch könnte a beliebig groß werden, allerdings strebt h dann gegen null.

c) $A' = 12a + 0{,}15 - \frac{4}{a^2} - \frac{0{,}2}{a^3}$

$A' = 0$ ergibt mit Technologieeinsatz für $a = 0{,}705$.

(Die 2. mögliche Lösung ist negativ und ist nicht sinnvoll.)

$A'' = 12 + \frac{8}{a^3} + \frac{0{,}6}{a^4}$

$A''(0{,}705) = 37{,}26$ ist positiv $\rightarrow$ es liegt ein Minimum vor.

Die Packung mit einer Länge der Seitenkante a von ungefähr 7 cm benötigt am wenigsten Karton.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 9

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 3
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 4

Thema: Alltag

Quelle: Daten und Bildidee von http://www.tetrapak.com/at/

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Spiegelung an einer Geraden

Aufgabennummer: B-C4_01

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es soll ein Applet zur Spiegelung eines Punktes an einer Geraden für eine Übungswebsite programmiert werden.

a) Das einfachste Grundproblem beim Spiegeln von Objekten ist die Spiegelung eines Punktes an einem anderen Punkt. Erklären Sie anhand einer Skizze ohne zu rechnen die Vorgangsweise, wie man die Koordinaten des gespiegelten Punktes A' erhält, wenn ein beliebiger gegebener Punkt A an einem ebenfalls gegebenen Punkt S gespiegelt wird. Geben Sie eine allgemeine Formel für die Berechnung der Koordinaten von A' an.

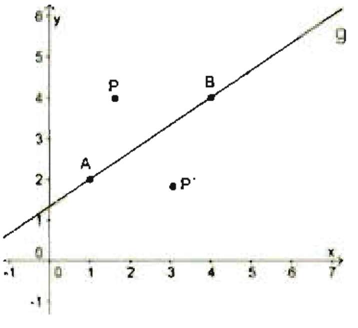
b) Ein Punkt $A = (x|y)$ soll an der Gerade $y = -x + 2$ gespiegelt werden. Geben Sie diejenige Matrix an, mit der man die Koordinaten des gespiegelten Punktes (= Bildpunktes) berechnen kann. (Verwenden Sie homogene Koordinaten.)

c) Die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$ kann unter Verwendung von homogenen Koordinaten durch folgende Matrix beschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie mithilfe der gegebenen Matrix die Bildpunkte zu den Punkten $A = (2{,}6|3{,}6)$; $B = (-1{,}6|1{,}9)$; $C = (-5|4{,}8)$; $D = (-4{,}6|0{,}3)$; $E = (-8{,}4|-2)$; $F = (-4|-3)$ und stellen Sie alle Punkte und Bildpunkte in einem Koordinatensystem grafisch dar. Verbinden Sie die Punkte in der Reihenfolge $ABCDEFE_1D_1C_1B_1A_1$ und beschreiben Sie die entstehende geometrische Figur in Worten.

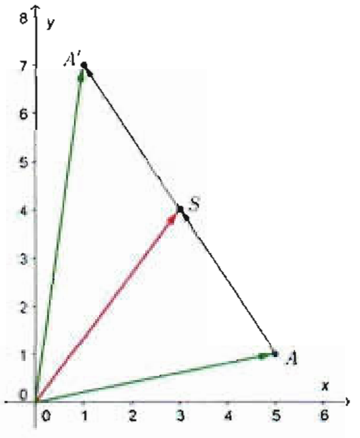
d) Ein Punkt $P = (2|4)$ wurde an der durch $A = (1|2)$ und $B = (4|4)$ verlaufenden Geraden g gespiegelt. Dabei ist der Punkt $P' = (3|2)$ entstanden. Geben Sie eine Formel an, mit der der Winkel $\angle PAP'$ mithilfe der Vektorrechnung berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen.



Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Um die Arbeitsschritte erklären zu können, zeichnet man am besten eine Handskizze (nicht unbedingt notwendig).



Arbeitsschritte:
1. Ortsvektor des Spiegelpunktes S und des Punktes A ermitteln.
2. Der Ortsvektor für A' erlaubt die Bestimmung der Koordinaten des gespiegelten Punktes: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AS}$.

b) Vorgangsweise:
1. Schritt = verschieben des Koordinatensystems, so dass die Spiegelungsachse durch den Koordinatenursprung geht
2. Schritt = Drehung um den Winkel $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, so dass die Spiegelungsachse mit der x-Achse zusammenfällt
3. Schritt = Spiegelung an der x-Achse
4. Schritt = zurückdrehen, so dass die Spiegelungsachse den ursprünglichen Winkel hat
5. Schritt = zurückverschieben, so dass die Spiegelungsachse an der ursprünglichen Stelle liegt

Zugehörige Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der obigen Matrizen liefert die gesuchte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

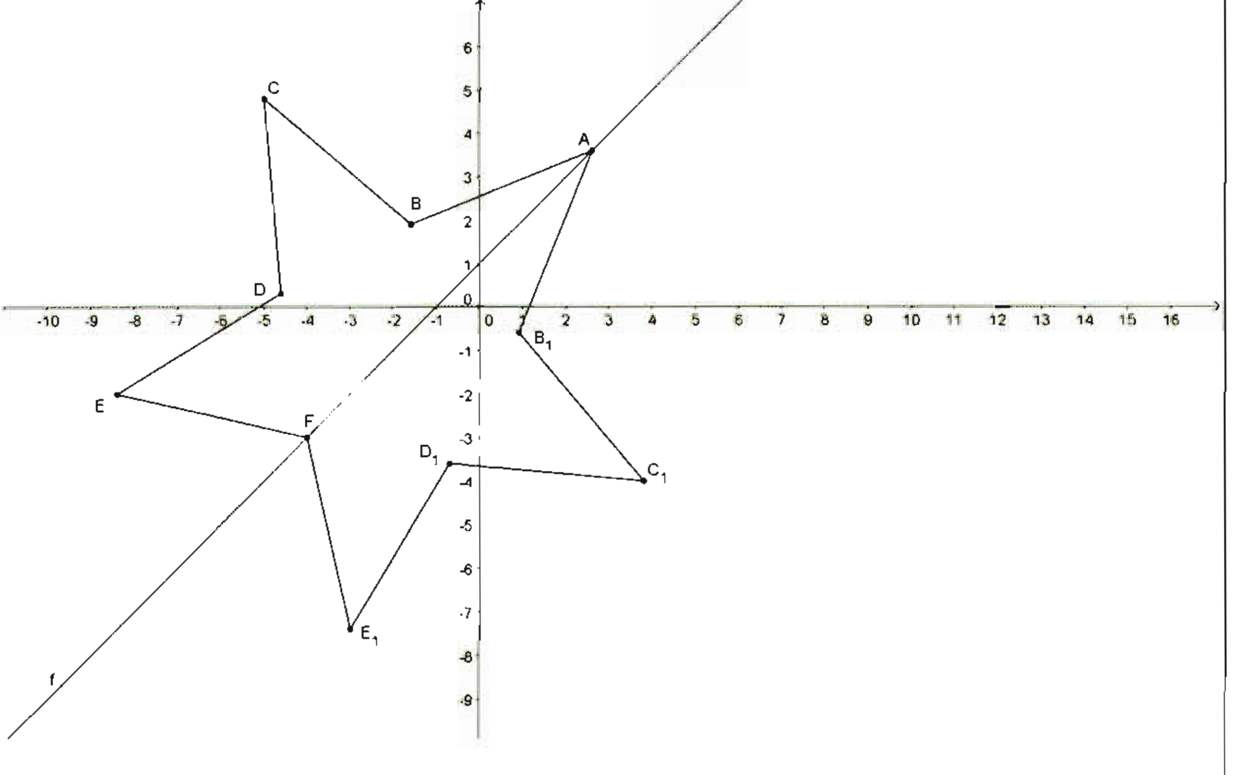
c) Man muss die Matrix mit den gegebenen Punkten multiplizieren. Dazu muss man die Punkte mithilfe von homogenen Koordinaten darstellen (letzte Koordinate ist immer eine 1).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1,6 \\ 1,9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ -0,6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1 = (0,9 \mid -0,6)$$

Ebenso verfährt man mit allen anderen Punkten:

$A_1 = (2,6|3,6)$
$C_1 = (3,8|-4)$
$D_1 = (-0,7|-3,6)$
$E_1 = (-3|-7,4)$
$F_1 = (-4|-3)$

Zeichnet man diese nun in ein Koordinatensystem ein und verbindet die verlangten Punkte, so entsteht ein Stern:



d) Zur Berechnung des Winkels wird die Formel $\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AP'}|}$ verwendet.

$\overrightarrow{AP} = \binom{1}{2}$, $\overrightarrow{AP'} = \binom{2}{0}$ → $\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot 2}$ → $\varphi = 63,43°$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 4

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 4
c) leicht	c) 4
d) leicht	d) 2

Thema: Informatik

Quellen: –